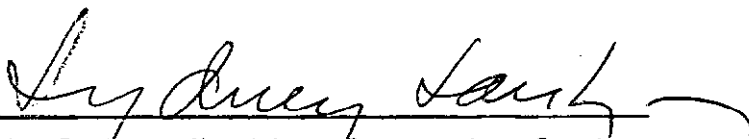



FLEXÃO TÉRMICA DAS PLACAS

Euler de Oliveira Guerra

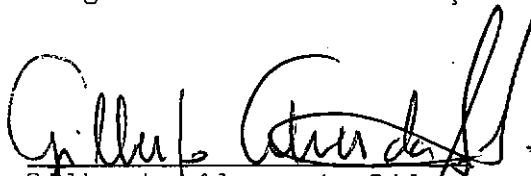
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:

  
Prof. Sydney Martins Gomes dos Santos  
(Presidente)

  
Benjamin Ernani Diaz

  
Sérgio Fernandes Villaga

  
Gilberto Alves da Silva

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MAIO DE 1982

GUERRA, EULER DE OLIVEIRA

Flexão Térmica das Placas (Rio de Janeiro) 1982.

xi , 187 p. 29,7 cm (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1982)

Tese - Univ. Federal do Rio de Janeiro. Faculdade de Engenharia.

1. Placas

2. Flexão Térmica

3. Diferenças Finitas

I. COPPE/UFRJ

II. Título (Série)

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Sýdney Martins Gomes dos Santos, pela valiosa orientação.

Ao colega em tese: Renato Bertolino Junior pela ajuda e interesse demonstrado.

A CNEN pelo apoio financeiro.

A minha esposa e meus pais pelo incentivo.

A datilógrafa Atsuko por seu trabalho paciente e desgastante.

A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho.

RESUMO

A flexão térmica das placas de espessura reduzida sujeita a um campo estacionário de temperatura  $T = T(x,y,z)$  é analisada pelo método das diferenças finitas.

A análise é restrita à teoria das pequenas flechas e a interação entre os efeitos de flexão e de membrana são negligenciados. Abordaremos as placas retangulares isotrópicas e ortotrópicas, placas retangulares sobre base elástica e placas circulares, combinando-se de forma variada, as seguintes condições de contorno: livre, engaste e apoio simples.

Procurou-se apresentar as soluções de forma a facilitar o emprego manual ou programação automática, já que as dificuldades da aplicação do método das diferenças finitas residem nos pontos do contorno ou nas proximidades do mesmo.

A convergência do processo é exemplificada através de alguns exemplos de solução analítica disponível na literatura.

SUMMARY

The thermal bending of the plates with thin thickness subjected to a stationary thermal field  $T = T(x,y,z)$  is analysed by the ordinary finite difference method.

The analysis is restricted to the small deflections theory and interactions between the bending and the membrane forces effects are neglected. A study on the isotropic and orthotropic rectangular plates, rectangular plates on elastic foundations and circular plates is made, by means of different combinations as to the following boundary conditions: clamped, simply supported and free.

The solutions were presented as to facilitate the manual use or automatic programming, since the difficulties on the application of the ordinary finite difference method reside on the boundary points or at it's vicinity.

The process convergence is evaluated through some analytical solution examples available in the literature.

NOTAÇÕES ADOADAS

$x, y, z$  - Coordenadas retangulares

$r, \theta, z$  - Coordenadas polares

$i$  - Ponto central da molécula

$i, a, b, l, r, ar, al, bl, br, aa, bb, rr, ll$  - Índices das "moléculas" em diferenças finitas

$\nabla^2$  - Operador de Laplace em coordenadas retangulares

$\nabla_r^2$  - Operador de Laplace em coordenadas polares

$t$  - Espessura da placa

$\nu, \nu_x, \nu_y$  - Coeficientes de Poisson

$\alpha_T, \alpha_{Tx}, \alpha_{Ty}$  - Coeficientes de dilatação térmica

$\epsilon_x, \epsilon_y$  - Projeções do alongamento unitário sobre os eixos  $X$  e  $Y$ , respectivamente

$\epsilon_T$  - Alongamento unitário devido a efeitos térmicos

$\gamma_{xy}$  - Componente da deformação tangencial no sistema retangular

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  - Componentes da tensão normal, paralelas aos eixos coordenados

$\tau_{xy}$  - Tensão tangencial

$E, E_x, E_y$  - Módulo de elasticidade longitudinal

$D, D_x, D_y$  - Rigidez a flexão por unidade de comprimento

$B$  - Rigidez torsional efetiva da placa ortotrópica

$\mu$  - Coeficiente de mola de uma base elástica

$w$  - Flecha da placa

$M_x, M_y$  - Momentos fletores por unidade de comprimento, cujos vetores de seta dupla são paralelos aos eixos  $X$  e  $Y$ , respectivamente

$M_{xy}$  - Momento torsor por unidade de comprimento

$M_T, M_{Tx}, M_{Ty}$  - Momentos fletores equivalentes térmicos

$Q_x, Q_y$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{Esforço cortante por unidade de comprimento,} \\ \text{paralelo ao eixo } z \end{array} \right.$

$V_x, V_y, V_r, V_\theta$  - Forças verticais totais por unidade de comprimento de bordo de placa, paralelas ao eixo  $z$

$p_z^*(x,y), p_z^*(r,\theta)$  - Carga transversal fictícia por unidade de área de placa em coordenadas retangulares e polares, respectivamente

$T(x,y,z), T(r,\theta,z)$  - Distribuição genérica de temperatura em coordenadas cartesianas e polares, respectivamente

$h$  - Espaçamento da malha retangular em D.F., paralelo ao eixo  $X$

$k$  - Espaçamento da malha retangular em D.F., paralelo ao eixo  $Y$

$\alpha$  - Relação entre espaçamentos da malha retangular em diferentes finitas

$\gamma$  - Espaçamento da malha em coordenadas polares, na direção circunferencial

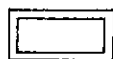
$N$  - Número de divisões da malha em coordenadas polares, na direção radial

$\lambda$  - Relação entre os raios externo e interno de uma placa cir

cular

$A, \chi_i, C, \beta_i, R, \theta_i, \xi, \zeta, \psi, \eta$  - Grandezas auxiliares

$P_z^*(x, y), P_z^*(r, \theta)$  - Valor ponderado do carregamento fictício por unidade de área em coordenadas retangulares e polares, respectivamente.



- Representação do ponto central das "moléculas" em diferenças finitas



ÍNDICE

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO</u> .....	1
<u>CAPÍTULO II - PLACAS ISOTRÓPICAS</u> .....	5
2.1 - Considerações Gerais e Hipóteses Básicas.....	5
2.2 - Equações Básicas.....	7
2.3 - Condições de Contorno.....	15
2.3.1 - Bordo Engastado.....	16
2.3.2 - Bordo Simplesmente Apoiado.....	17
2.3.3 - Bordo Livre.....	18
2.4 - Método de Solução.....	19
2.4.1 - Introdução.....	19
2.4.2 - Flexão térmica de placas retangulares em Diferen ças Finitas.....	23
2.4.2.1 - Equação Geral.....	23
2.4.2.2 - Condições de Contorno.....	25
2.5 - Aplicações.....	31
2.5.1 - Bordo Engastado.....	32
2.5.2 - Bordo Simplesmente Apoiado.....	34
2.5.3 - Bordo Engastado e Bordo Simplesmente Apoiado....	35
2.5.4 - Bordo Livre.....	36
2.5.5 - Bordo Engastado e Bordo Livre.....	40
2.5.6 - Bordo Simplesmente Apoiado e Bordo Livre.....	42
2.6 - Obtenção dos Esforços.....	44

<u>CAPÍTULO III - PLACAS RETANGULARES SOBRE BASE ELÁSTICA..</u>	47
3.1 - Considerações Iniciais e Hipóteses Básicas.....	47
3.2 - Equações Básicas .....	47
3.3 - Condições de Contorno.....	49
3.4 - Método de Solução.....	50
 <u>CAPÍTULO IV - PLACAS CIRCULARES.....</u>	 52
4.1 - Introdução.....	52
4.2 - Equações Básicas.....	52
4.3 - Condições de Contorno.....	55
4.3.1 - Bordo Engastado.....	55
4.3.2 - Bordo Simplesmente Apoiado.....	56
4.3.3 - Bordo Livre.....	56
4.4 - Método de Solução.....	57
4.4.1 - Equação Geral em Diferenças Finitas (D.F.).....	57
4.5 - Placas circulares com Aquecimento com Simetria <u>A</u> xial.....	63
4.5.1 - Equações Básicas.....	63
4.5.2 - Condições de Contorno.....	66
4.5.2.1 - Bordo Engastado.....	66
4.5.2.2 - Bordo Simplesmente Apoiado.....	67
4.5.2.3 - Bordo Livre.....	68
4.5.3 - Obtenção dos Esforços.....	69
4.6 - Aplicações do Caso Geral.....	70
4.6.1 - Bordo Engastado.....	72

4.6.2 - Bordo Simplesmente Apoiado.....	73
4.6.3 - Bordo Engastado e Bordo Simplesmente Apoiado.....	76
4.6.4 - Bordo Livre.....	78
4.6.5 - Bordo Engastado e Bordo Livre.....	96
4.6.6.- Bordo Simplesmente Apoiado e Bordo Livre.....	102
4.7 - Obtenção dos Esforços.....	108

## CAPÍTULO V - PLACAS ORTOTRÓPICAS..... 112

5.1 - Introdução.....	112
5.2 - Hipóteses e Equações Básicas.....	112
5.3 - Condições de Contorno.....	117
5.3.1 - Bordo Engastado.....	117
5.3.2 - Bordo Simplesmente Apoiado.....	117
5.3.3 - Bordo Livre.....	118
5.4 - Aplicações (placas retangulares).....	120
5.4.1 - Bordo Engastado.....	121
5.4.2 - Bordo Simplesmente Apoiado.....	123
5.4.3 - Bordo Engastado e Bordo Simplesmente Apoiado.....	124
5.4.4 - Bordo Livre.....	125
5.4.5 - Bordo Engastado e Bordo Livre.....	130
5.4.6 - Bordo Simplesmente Apoiado e Bordo Livre.....	132
5.5 - Obtenção dos Esforços.....	134

## CAPÍTULO VI - EXEMPLOS E ANÁLISE DOS RESULTADOS..... 137

6.1 - Considerações Gerais.....	137
---------------------------------	-----

6.2 - Placas Analisadas.....	137
6.2.1 - Placa Retangular Simplesmente Apoiada: $T = T(z)$ ..	138
6.2.2 - Placa Quadrada Simplesmente Apoiada: $T = T(x,y,z)$	140
6.2.3 - Placa retangular com dois bordos opostos livres e dois simplesmente apoiados.....	144
6.2.4 - Placa Retangular Sobre Base Elástica.....	147
6.2.5 - Placa Circular com Furo Central.....	149
6.2.6 - Placa Circular.....	152
6.2.7 - Setor Circular.....	155
6.2.8 - Placas Retangulares Ortotrópicas.....	159
6.3 - Conclusões.....	160
6.3.1 - Sobre os exemplos analisados.....	160
6.3.2 - Sobre o uso do método das diferenças finitas....	161
6.3.3 - Sobre a continuação da pesquisa.....	163
<u>BIBLIOGRAFIA</u> .....	164
<u>LISTAGENS DOS EXEMPLOS</u> .....	167

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

O comportamento dos sólidos submetidos a campos térmicos vem sendo amplamente estudado e existe um grande número de publicações tanto no campo da condução de calor como na termoelasticidade. Desenvolvimentos nestas áreas durante as duas últimas décadas produziram uma variedade de soluções e técnicas diretamente aplicadas à engenharia.

Uma das causas que originam tensões em um corpo é a variação de temperatura não uniforme. Com esta variação, partes discretizadas deste corpo se deformam. Tal deformação, geralmente, não pode ocorrer livremente em um sólido contínuo, e estabelecem-se tensões devidas a impedimentos internos, ou mesmo externos. Estas tensões térmicas sozinhas ou em combinação com tensões oriundas de outras cargas externas podem provocar fissuras e até a ruptura de elementos estruturais, principalmente naqueles formados por materiais frágeis, considerando ainda que a ação repetida destas tensões podem levar o material à fadiga. As conseqüências de tais tensões são importantes em muitos aspectos de projetos da engenharia como, por exemplo, laje de pavimentos de rodovias e aeroportos, lajes em geral que separam meios de temperatura bem diferentes, estruturas de aeronaves e centrais nucleares.

Segundo Parkus [16]: "Embora o interesse pelo campo da termoelasticidade date de antes de 1837, quando Duhamel pu

blicou o famoso MÉMOIRE SUR LES PHÉNOMENES THERMOMÉCANIQUES, somente durante as duas últimas décadas pesquisas ativas e sistemáticas vêm sendo conduzidas". Em 1964 Parkus estimou que aproximadamente 850 papers e livros surgiram durante aquele período. Atualmente este número deve ter dobrado.

A teoria básica para análise termoelástica das placas bem como os métodos analíticos para solução das equações termoelásticas encontram-se bem estabelecidas em Boley [7] e Nowacki [15]. Contudo, as aplicações práticas dos métodos analíticos são limitadas a placas de geometria particulares, "cargas" (campo térmico e/ou carregamento transversal) e condições de contorno relativamente simples. Conseqüentemente, análises numéricas vêm sendo estudadas extensivamente e várias aproximações baseadas em métodos variacionais (exemplo Keramidas [13], Gutierrez [11]) vêm-se desenvolvendo para solução destes problemas termoelásticos.

Na teoria das pequenas flechas de placas de espessura reduzida admite-se que há uma interação negligenciável entre as "forças" de membrana e de flexão. Do ponto de vista das tensões térmicas, isto é, para distribuições de temperatura mais gerais, o estudo das placas pode ser dividido em duas categorias: (a) problemas de membrana, que surgem quando a variação de temperatura é uniforme com a espessura, isto é, há variação somente com as coordenadas do plano da placa; (b) problemas de flexão, que surgem quando a temperatura varia também com a espessura.

Deteremos nosso estudo no caso (b) aplicado a placas de espessura constante e campo térmico estacionário, ou seja, independente do tempo. No caso (a) Ariman <sup>[3]</sup> e Baker <sup>[4]</sup> desenvolveram trabalhos tratando de problemas mais complexos envolvendo placas retangulares com furos circulares e ortotrópia, respectivamente. No caso (b) Boley <sup>[7]</sup> e Nowacki <sup>[15]</sup> reservam um capítulo específico para placas onde são apresentadas as equações básicas e métodos analíticos gerais. São resolvidos, nestes trabalhos apenas alguns exemplos para placas retangulares e circulares restritas a condições de contorno relativamente simples, enquanto Ariman <sup>[2]</sup> analisa placas retangulares com furos circulares. Em B.A. Boley <sup>[6]</sup> estão reunidas as mais importantes contribuições no campo da condução de calor e termoelasticidade, apresentado na Primeira Conferência Internacional de Mecânica Estrutural em Tecnologia de Reatores, realizada em Berlim em setembro de 1971.

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar soluções de fácil aplicação envolvendo as placas retangulares isotrópicas e ortotrópicas, placas circulares e placas sobre base elástica, combinando-se condições de contorno variadas, como: engaste, apoio simples e bordo livre. Diante das dificuldades apresentadas para obtenção de soluções analíticas, empregaremos o método das diferenças finitas, caracterizado por sua grande versatilidade e simplicidade nas aplicações.

Ainda neste trabalho, foram comparados os resultados numéricos com os resultados analíticos disponíveis na literatura. Como uma regra geral, é desejável que os "erros de cálculo

lo" (imprecisão obtida no uso de métodos aproximados) alcancem menos que  $\pm 5\%$  de discrepância em comparação com a solução exata. Em algumas aplicações práticas  $\pm 10\%$  de erro de cálculo são considerados permissíveis.

Com estas diretrizes desenvolveremos exemplos do método das diferenças finitas para analisar a flexão térmica das placas.



## CAPÍTULO II

### PLACAS ISOTRÓPICAS

#### 2.1. Considerações Gerais e Hipóteses Básicas

Os conceitos básicos de flexão de placas retangulares, assim como os fundamentos do método das diferenças finitas serão relembrados brevemente para que sirvam de base ao desenvolvimento deste, e dos demais capítulos.

Deteremos nosso estudo no caso das placas sujeitas a atuação de um campo térmico  $T$ , estacionário, isto é, independente do tempo:  $T = T(x, y, z)$

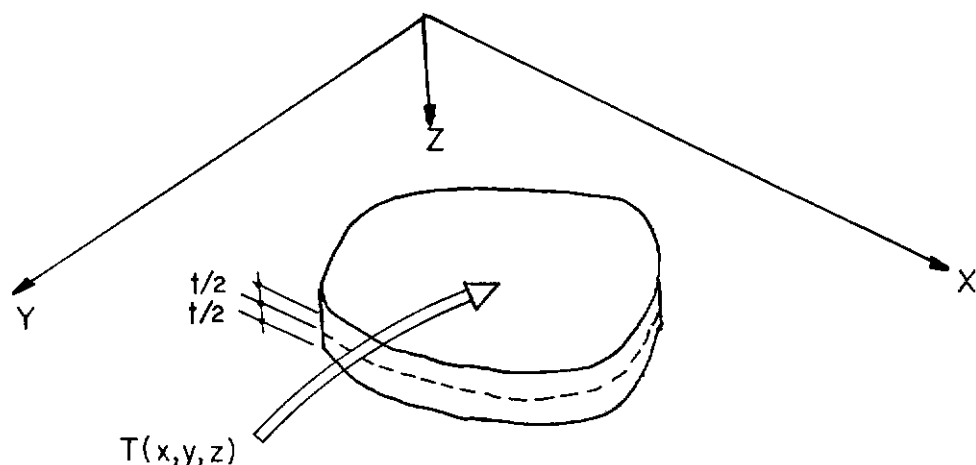


FIGURA II-1

Basear-nos-emos na teoria das placas sujeitas a pequenas deformações, geralmente atribuída a Kirchhoff e Love, adotando as seguintes hipóteses:

a - As flechas serão pequenas em comparação com a espessura

(t) da placa: flecha max.  $< t/15$  a  $t/10$

b - Placas de pequena espessura:  $t < (\text{MENOR DIMENSÃO}/10)$

c - As seções se mantem planas e as retas normais à superfície média da placa assim se conservam após a atuação do carregamento (e/ou campo térmico)

d - Os deslocamentos dos pontos da superfície média são normais ao seu plano inicial.

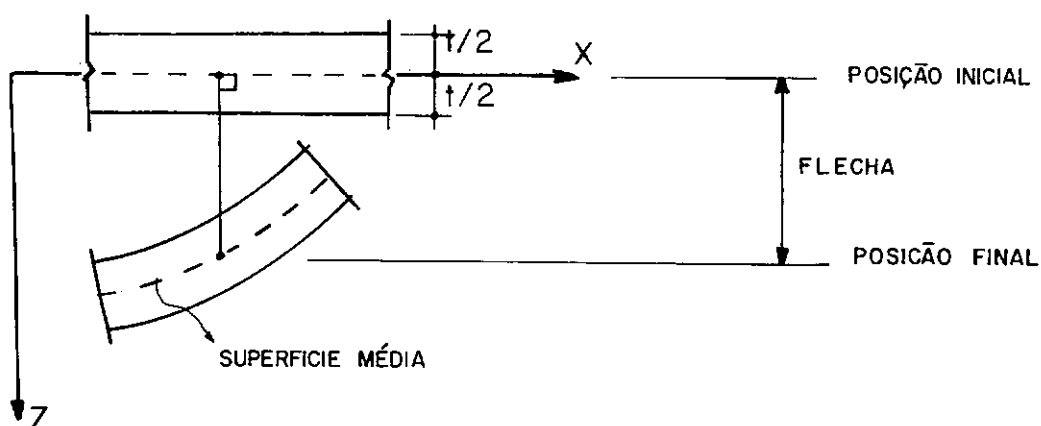


FIGURA II-2

e - Material da placa é homogêneo, isotrópico e linearmente elástico.

f - Desprezaremos as tensões normais paralelas ao eixo

$z$ :  $\sigma_z = 0$ .

Como resultado das hipóteses a e b, as deformações do plano médio da placa serão desprezíveis em comparação com as deformações devidas à flexão, podendo tratar estes efeitos independentemente.

Adicionaremos às hipóteses anteriores as seguintes

considerações:

- 1 - As propriedades do material da placa não são afetadas pelas variações de temperatura
- 2 - Proporcionalidade direta entre as variações de temperatura e seus efeitos (expansão ou contração). Esta relação de linearidade é expressa pelo coeficiente de dilatação térmica do material,  $\alpha_T$ , podendo exprimir as deformações térmicas por:

$$\epsilon_T = \alpha_T T \quad (\text{II-1})$$

Como causas do surgimento das tensões térmicas, temos duas situações características impostas por condições de contorno da placa. Numa primeira situação, imaginemos uma placa livre para se mover nos contornos, sujeita a um aquecimento ou resfriamento de variação não uniforme com a espessura. Tomando-se uma lâmina da placa, paralela à superfície média, esta não poderá expandir-se ou contrair-se livremente, devido às restrições de continuidade existentes entre as várias lâminas adjacentes impedidas de se deformarem livremente e de maneira compatível com a distribuição da temperatura. Surgirão assim, tensões térmicas auto equilibradas. Uma outra situação, seria aquela em que as condições de contorno impedissem uma livre deformação da placa.

## 2.2. Equações Básicas

Consideremos uma placa delgada de espessura  $t$ , cuja superfície média coincida com plano XY da figura abaixo, em que  $z$  é a distância a esse plano. Os deslocamentos dos pontos

da superfície média, nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  se denotam respectivamente por  $u$ ,  $v$  e  $w$ .

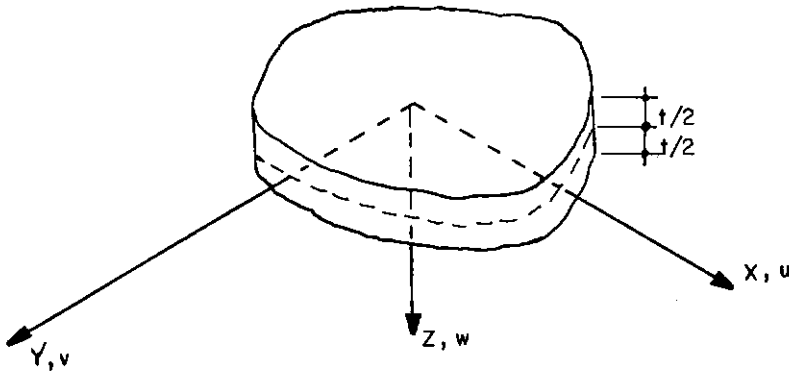


FIGURA II-3

Como consequência das hipóteses adotadas anteriormente os deslocamentos de qualquer ponto da superfície média, ou seja, do plano  $XY$ , poderão ser definidos por uma translação na direção  $Z$  e duas rotações, uma em torno do eixo  $Y$  e outra em torno do eixo  $X$ .

As relações entre deformações e deslocamentos (flechas) são:

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{II-2})$$

$$\epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (\text{II-3})$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{II-4})$$

As relações entre deformações e tensões, segundo a lei de Hooke, são:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \alpha_T T \quad (\text{II-5})$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} + \alpha_T T \quad (\text{II-6})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (\text{II-7})$$

$$\text{ou: } \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_T T \\ \alpha_T T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II-8})$$

$$\text{ou: } \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{E}{1-\nu} \begin{Bmatrix} \alpha_T T \\ \alpha_T T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II-9})$$

As expressões dos momentos por unidade de comprimento são:

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z \, dz \quad (\text{II-10})$$

$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z \, dz \quad (\text{II-11})$$

$$M_{xy} = - \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z \, dz \quad (\text{II-12})$$

Estes esforços podem ser expressos em função dos deslocamentos, combinando-se as fórmulas (II-2), (II-3), (II-4) e (II-9), juntamente com as três expressões anteriores; obtendo-se:

$$M_x = - D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] - M_T \quad (\text{II-13})$$

$$M_y = - D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - M_T \quad (\text{II-14})$$

$$M_{xy} = D (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = - M_{yx} \quad (\text{II-15})$$

onde a rigidez da placa por unidade de comprimento é:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{II-16})$$

$M_T$  representa o "momento fletor térmico equivalente", definido por:

$$M_T = \frac{E\alpha_T}{1-\nu} \int_{-t/2}^{t/2} T(x,y,z) z \, dz \quad (\text{II-17})$$

As tensões por unidade de comprimento, numa fibra qualquer da placa, paralela à superfície média, distante  $z$  da

mesma, como mostra a Fig. (II-4) podem ser calculadas diretamente em função dos momentos, conjugando-se as expressões (II-2), (II-3), (II-4), (II-9), (II-13), (II-14) e (II-15):

$$\sigma_x = \frac{12z}{t^3} (M_x + M_T) - \frac{E\alpha_T T}{1-\nu} \quad (\text{II-18})$$

$$\sigma_y = \frac{12z}{t^3} (M_y + M_T) - \frac{E\alpha_T T}{1-\nu} \quad (\text{II-19})$$

$$\tau_{xy} = -\frac{12z}{t^3} M_{xy} \quad (\text{II-20})$$

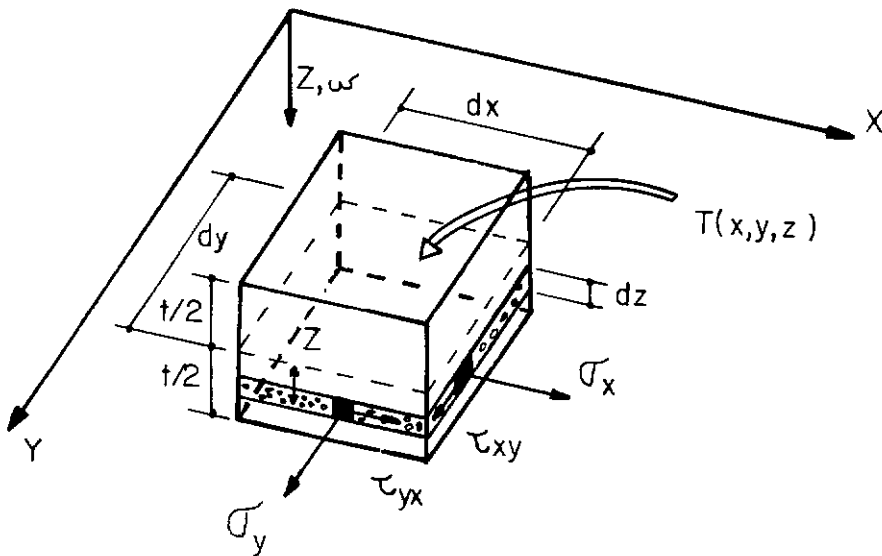


FIGURA II-4 - Elemento infinitesimal de placa

Escrevendo as equações de equilíbrio de forças na direção \$z\$ e de momentos em torno dos eixos \$X\$ e \$Y\$ num elemento de placa de volume \$dx \, dy \, dz\$, como mostra a fig (II-5), teremos condições de determinar as flechas \$w\$ e, conseqüentemente, a

partir das expressões (II-13), (II-14) e (II-15) obter os momentos atuantes.

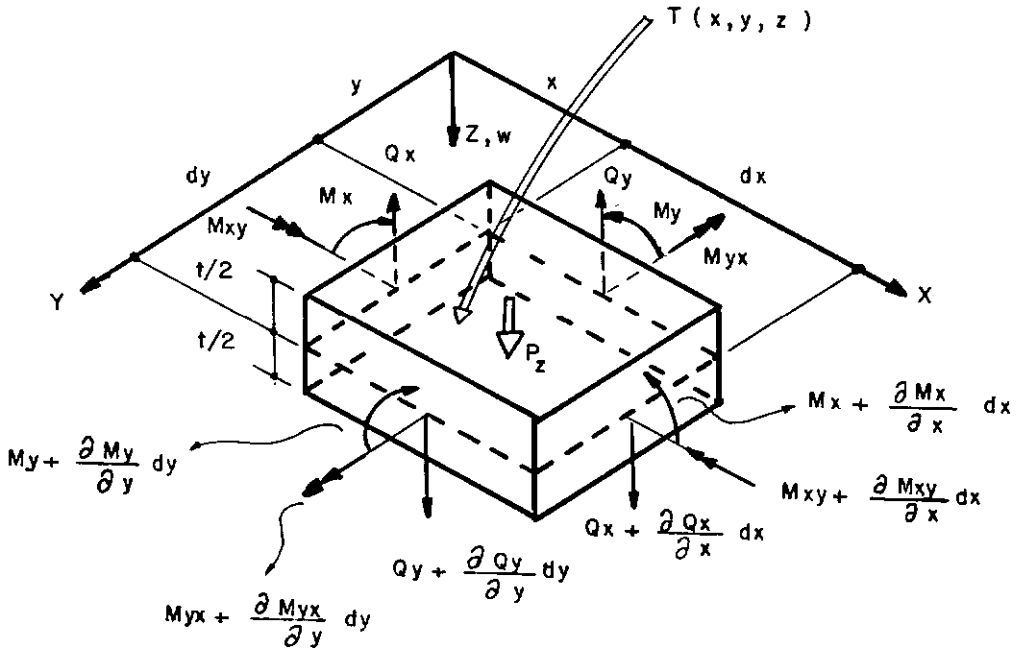


FIGURA II-5 - Elemento de placa usado na dedução das equações de equilíbrio.

Seja o elemento de placa da fig. (II-5) com carregamento externo vertical por unidade de área  $p_z(x,y)$  e sob efeito o campo térmico genérico  $T(x,y,z)$ .

As equações de equilíbrio são:

→ Rotação em relação ao eixo X:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \quad (\text{II-21})$$

→ Rotação em relação ao eixo Y:

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (\text{II-22})$$

→ Translação em Z:



$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p_z = 0 \quad (\text{II-23})$$

Onde  $Q_x$  e  $Q_y$  são os esforços cortantes por unidade de comprimento agindo nas faces de normal X e Y, respectivamente. Com a substituição de  $Q_x$  e  $Q_y$  das equações (II-21) e (II-22) na expressão (II-23), a equação do equilíbrio de forças na direção z, se transforma em:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -p_z \quad (\text{II-24})$$

A equação diferencial de flexão das placas será obtida substituindo-se as expressões dos momentos (II-13), (II-14), (II-15) e (II-16) na expressão (II-24):

$$D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] = p_z - \left[ \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_T}{\partial y^2} \right] \quad (\text{II-25})$$

Se somente os efeitos da atuação do campo térmico  $T(x,y,z)$  são desejados, podemos fazer  $p_z$  nulo na equação anterior, obtendo:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = - \nabla^2 M_T \quad (\text{II-26})$$

Onde,  $\nabla$  é o operador Laplaciano de 2.<sup>a</sup> ordem:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} .$$

Estas duas últimas equações mostram que a superposi  
ção dos efeitos do campo térmico e das cargas transversais, a  
tuando separadamente, é possível.

Integrada esta equação, obtemos a expressão para as  
flechas  $w(x,y)$ , com a qual passamos a obter os momentos [equa  
ções (II-13), (II-14) e (II-15)] e as tensões [equações (II-18),  
(II-19) e (II-20)].

Neste trabalho, o procedimento acima será feito com  
o auxílio do método das diferenças finitas.

As expressões (II-22) e (II-21) serão usadas para  
determinar os esforços cortantes  $Q_x$  e  $Q_y$ , respectivamente:

$$Q_x = \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] - \frac{\partial M_T}{\partial x} \quad (\text{II-27})$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] - \frac{\partial M_T}{\partial y} \quad (\text{II-28})$$

Ou, usando o operador:

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[ \nabla^2 w + \frac{M_T}{D} \right] \quad (\text{II-29})$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left[ \nabla^2 w + \frac{M_T}{D} \right] \quad (\text{II-30})$$

### 2.3. Condições de Contorno

A expressão (II-26) representa a equação que governa a flexão térmica de placas e deve ser resolvida com adequadas condições de contorno.

Analisaremos neste trabalho os bordos engastados, simplesmente apoiados e livres.

Denominando  $s$  e  $n$  as coordenadas ortogonais tangente e normal ao bordo da placa, conforme figura (II-6)

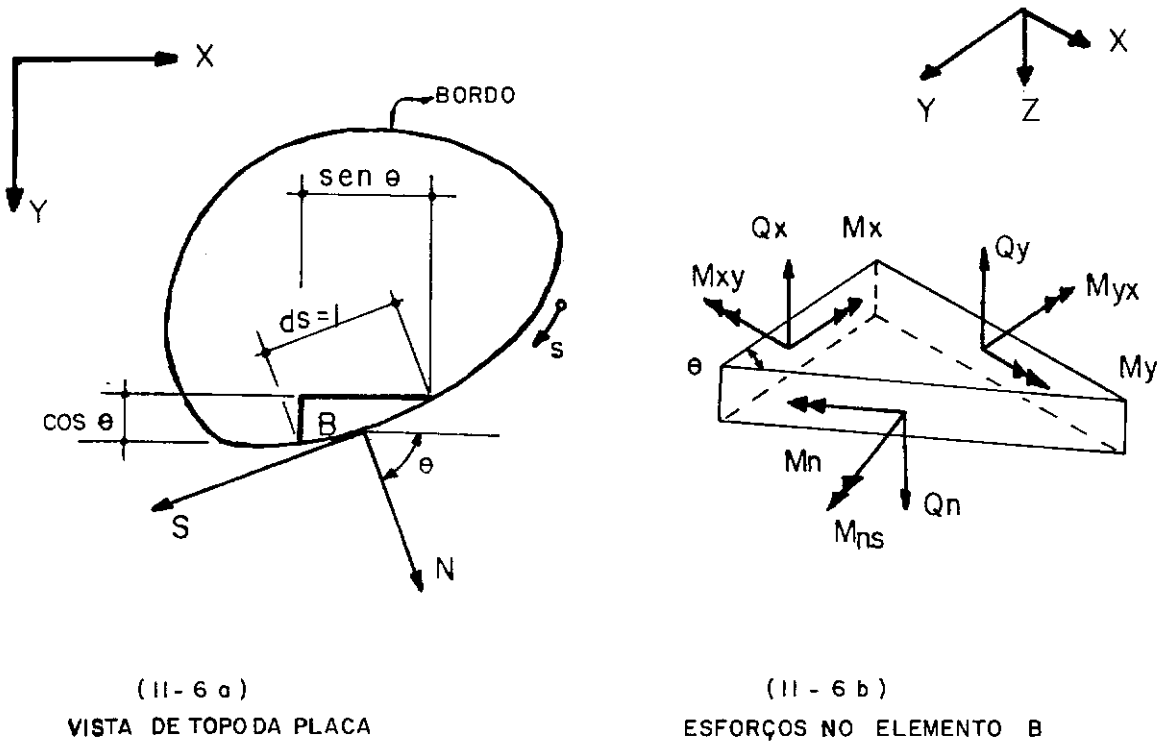


FIGURA II-6

Escrevendo-se o equilíbrio de um elemento infinitesimal B (veja Fig. II-6) do bordo da placa, relacionaremos os momentos fletores e torsões  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{xy}$  com os momentos  $M_n$  e  $M_{ns}$  do contorno pelas expressões:

$$\begin{Bmatrix} M_n \\ M_{ns} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -\sin 2\theta \\ \frac{\sin 2\theta}{2} & -\frac{\sin 2\theta}{2} & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II-31})$$

Sendo  $\theta$ , o ângulo entre a normal ao bordo e o eixo cartesiano X.

As forças cortantes  $Q_x$  e  $Q_y$  são relacionadas com  $Q_n$  através de:

$$Q_n = Q_x \cos \theta + Q_y \sin \theta. \quad (\text{II-32})$$

onde  $Q_x$  e  $Q_y$  são dadas por (II-29) e (II-30), respectivamente.

### 2.3.1. Bordo Engastado

A condição de engaste se exprime por: a flecha em todos os pontos do bordo e a rotação da superfície fletida na direção (n) normal ao bordo, são nulas:

$$w = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad (\text{II-33})$$

onde a rotação  $\frac{\partial w}{\partial n}$  está relacionada com as rotações em torno dos eixos coordenados X-Y, pela expressão:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta \quad (\text{II-34})$$

### 2.3.2. Bordo Simplesmente Apoiado

Ao longo do bordo simplesmente apoiado a flecha e a componente tangencial do momento fletor (Vetor de seta dupla) são nulas, isto é:

$$w = 0 \quad \text{e} \quad M_n = 0 \quad (\text{II-35})$$

Combinando-se as expressões (II-31), (II-13), (II-14) e (II-15), a segunda condição de contorno pode ser representada em termos das flechas por:

$$(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \theta \right] + \nu \nabla^2 w = - \frac{M_T}{D} \quad (\text{II-36})$$

Num caso particular de placa retangular em que o bordo analisado é paralelo ao eixo Y, teremos  $\theta = 0$ , e dessa forma a condição (II-36) se escreve:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \frac{M_T}{D} \quad (\text{II-37})$$

Ou ainda, quando analisarmos em bordo paralelo ao eixo X, teremos  $\theta = 90^\circ$ , e:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \frac{M_T}{D} \quad (\text{II-38})$$

Usando a (II-31) combinada com (II-13), (II-14) e (II-15), podemos representar o momento torsor numa face qual

quer de normal  $n$  por :

$$M_{ns} = (1-\nu) D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin \theta \cos \theta \right] \quad (\text{II-39})$$

### 2.3.3. Bordo Livre

O momento fletor em qualquer ponto de um bordo livre é nulo, isto é,  $M_n = 0$ . Isto significa que a equação (II-36) deve ser satisfeita. Além disto, num bordo livre devemos ter a força cortante  $Q_n$  (II-32) e o momento torsor (II-39) nulos. Entretanto estas duas últimas condições podem ser reunidas em uma única, como mostra TIMOSHENKO [22], resultando:

$$M_n = 0 \quad \text{e} \quad V_n = Q_n - \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = 0 \quad (\text{II-40})$$

onde  $V_n$  é a força vertical total por unidade de comprimento de bordo cuja normal é  $n$ .

Usando as equações (II-29), (II-30), (II-32) e (II-39), a última condição de contorno (II-40) se escreve:

$$V_n = -D \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin \theta \cos \theta \right] \right\}$$

$$- \frac{\partial}{\partial n} M_T = 0 \quad (\text{II-41})$$

$$\text{Onde } \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial n} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{II-42})$$

Num caso particular de placa retangular, onde analisarmos um bordo paralelo ao eixo Y, teremos  $\theta=0^\circ$ ,  $n=x$  e  $s=y$ :

$$D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = - \frac{\partial M_T}{\partial x} \quad (\text{II-43})$$

Analogamente, para um bordo paralelo ao bordo X, teremos:

$$D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right] = - \frac{\partial M_T}{\partial y} \quad (\text{II-44})$$

Podemos notar que num bordo livre, como no simplesmente apoiado, as condições de contorno devido à atuação de campos térmicos não são homogêneas, em contraste com a análise de placas isotérmicas. [Ver equações (II-37), (II-38), (II-43) e (II-44)]

## 2.4. Método de Solução

### 2.4.1. Introdução

A teoria de flexão térmica de placas apresentada nos itens anteriores mostra uma grande semelhança com a correspondente teoria de flexão isotérmica. Consequentemente, todos os

métodos numéricos e analíticos podem ser aplicados na presente análise.

Dentre os métodos numéricos possíveis, utilizaremos o das diferenças finitas, por sua grande generalidade no campo da mecânica das estruturas, associado ainda às seguintes vantagens: versatilidade; adequado à programação; precisão aceitável para a maioria dos propósitos técnicos, desde que se refine adequadamente a malha usada. Associamos ao uso das D.F. às dificuldades de obtenção de soluções analíticas rigorosas para as placas de forma e condições de contorno diversas.

A solução numérica da equação (II-26) por diferenças finitas envolve a substituição das derivadas da função deslocamento (flechas) por diferenças entre o valor desta em alguns pontos previamente selecionados. Estes pontos são chamados nós da malha de diferenças finitas. Assim a superfície fletida  $w(x,y)$  da placa será descrita pela determinação de valores aproximados das flechas nestes pontos nodais.

Usaremos neste trabalho as diferenças finitas centrais, desenvolvidas de forma detalhada em SALVADORI<sup>[17]</sup>. Transcreveremos aqui alguns resultados importantes e que serão usados no decorrer desta análise.

Seja  $f(x)$  uma função contínua qualquer como mostra a figura (II-7).



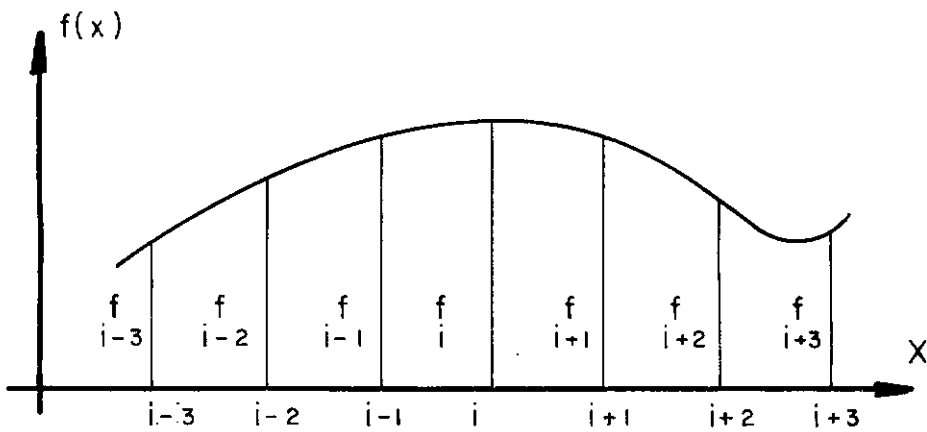


FIGURA II-7

Sendo  $h$  o espaçamento entre pontos do eixo das abscissas.

Podemos representar as derivadas desta função no ponto nodal  $i$ , através de expressões algébricas envolvendo o valor da função nas vizinhas do ponto considerado, como mostra a fig. (II-8).

$$\begin{aligned}
 2h \frac{df}{dx} &\approx \begin{array}{c} \boxed{-1} \text{ --- } \boxed{0} \text{ --- } \boxed{1} \end{array} & \text{(II-45a)} \\
 h^2 \frac{d^2 f}{dx^2} &\approx \begin{array}{c} \boxed{1} \text{ --- } \boxed{-2} \text{ --- } \boxed{1} \end{array} & \text{(II-45b)} \\
 2h^3 \frac{d^3 f}{dx^3} &\approx \begin{array}{c} \boxed{-1} \text{ --- } \boxed{2} \text{ --- } \boxed{0} \text{ --- } \boxed{-2} \text{ --- } \boxed{1} \end{array} & \text{(II-45c)} \\
 h^4 \frac{d^4 f}{dx^4} &\approx \begin{array}{c} \boxed{1} \text{ --- } \boxed{-4} \text{ --- } \boxed{6} \text{ --- } \boxed{-4} \text{ --- } \boxed{1} \\ \boxed{i-2} \text{ --- } \boxed{i-1} \text{ --- } \boxed{i} \text{ --- } \boxed{i+1} \text{ --- } \boxed{i+2} \end{array} & \text{(II-45d)}
 \end{aligned}$$

FIG. (II-8) Operadores em diferenças finitas centrais.

Os resultados anteriores para funções de uma variável serão usados para representar as derivadas parciais de uma função a duas variáveis  $f(x,y)$  no ponto nodal  $i$ , utilizando-se

para isto a malha da fig. (II-9).

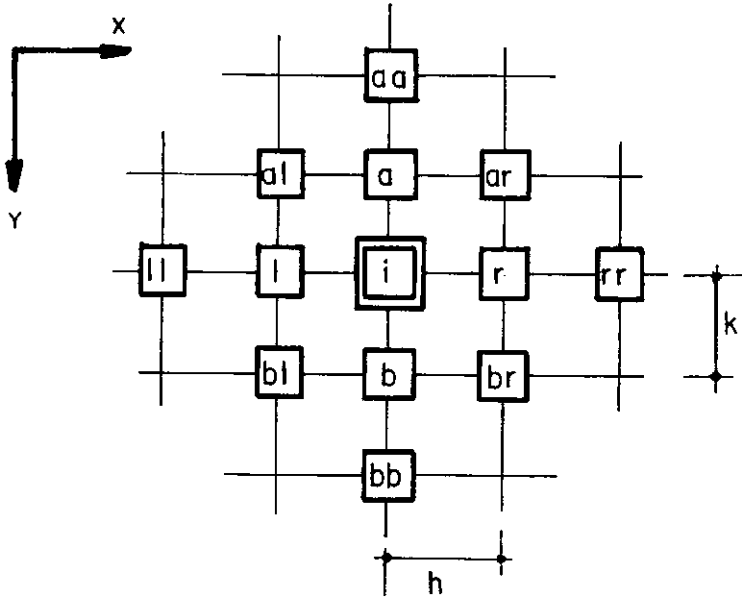


FIGURA II-9 - Malha retangular genérica

No ponto nodal  $i$  genérico, podemos escrever:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{1}{2h} [f_r - f_l] \quad (\text{II-46a})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \approx \frac{1}{2k} [f_b - f_a] \quad (\text{II-46b})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2} [f_r - 2f_i + f_l] \quad (\text{II-46c})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx \frac{1}{k^2} [f_b - 2f_i + f_a] \quad (\text{II-46d})$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \approx \frac{1}{2h^3} [f_{rr} - 2f_r + 2f_l - f_{ll}] \quad (\text{II-46e})$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \approx \frac{1}{2k^3} \left[ f_{bb} - 2f_b + 2f_a - f_{aa} \right] \quad (\text{II-46f})$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \approx \frac{1}{h^4} \left[ f_{rr} - 4f_r + 6f_i - 4f_\ell + f_{\ell\ell} \right] \quad (\text{II-46g})$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \approx \frac{1}{k^4} \left[ f_{bb} - 4f_b + 6f_i - 4f_a + f_{aa} \right] \quad (\text{II-46h})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \approx \frac{1}{4hk} \left[ f_{br} - f_{b\ell} + f_{a\ell} - f_{ar} \right] \quad (\text{II-46i})$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \approx \frac{1}{2kh^2} \left[ f_{br} + f_{b\ell} - f_{ar} - f_{a\ell} + 2f_a - 2f_b \right] \quad (\text{II-46j})$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \approx \frac{1}{2hk^2} \left[ f_{br} - f_{b\ell} + f_{ar} - f_{a\ell} + 2f_\ell - 2f_r \right] \quad (\text{II-46k})$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \approx \frac{1}{k^2 h^2} \left[ 4f_i - 2(f_a + f_b + f_\ell + f_r) + f_{ar} + f_{a\ell} + f_{b\ell} + f_{br} \right] \quad (\text{II-46l})$$

As expressões (II-45) e (II-46) serão usadas para representar a equação geral de flexão térmica de placas (II-26) juntamente com as condições de contorno envolvidas.

#### 2.4.2. Flexão térmica de placas retangulares em diferenças fi nitas

##### 2.4.2.1. Equação Geral

A equação geral de flexão térmica (II-26) escrita em diferenças finitas centrais é representada esquematicamente na fig. (II-10), obtida com auxílio das expressões (II-46g),

(II-46h) e (II-46l).

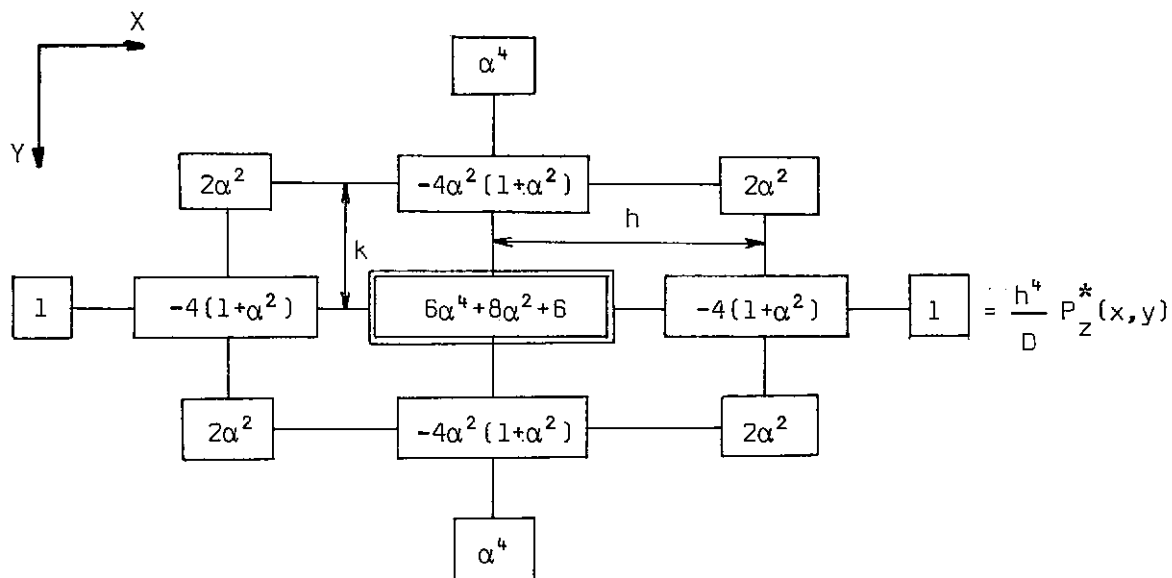


FIGURA II-10 - Equação geral de flexão térmica de placas usando malha retangular.

Na figura anterior temos:  $\alpha = h/k$  e  $P_z^*(x,y)$  representa o valor ponderado da carga fictícia transversal  $p^*(x,y) = -\nabla^2 M_T(x,y)$  relativa ao ponto central  $i$  da "molécula" da fig. (II-10).

O carregamento fictício por unidade de área  $p^*(x,y)$ , pode ser representado por seu valor ponderado em cada ponto de malha segundo duas considerações possíveis. Numa primeira hipótese, admitindo-se uma distribuição linear da carga  $p^*(x,y)$  entre os nós da malha, teremos:

$$P_z^*(x,y) = \frac{1}{36} \left\{ \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \boxed{4} & \boxed{1} \\ \boxed{4} & \boxed{16} & \boxed{4} \\ \boxed{1} & \boxed{4} & \boxed{1} \end{array} \right\} \quad (\text{II-47})$$

Numa segunda hipótese, admitindo-se uma distribuição parabólica de 2.<sup>a</sup> ordem da carga fictícia  $p^*(x,y)$  entre os pontos nodais da malha, teremos:

$$P_z^*(x,y) = \frac{1}{144} \left\{ \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \boxed{10} & \boxed{1} \\ \boxed{10} & \boxed{100} & \boxed{10} \\ \boxed{1} & \boxed{10} & \boxed{1} \end{array} \right\} \quad (\text{II-48})$$

Com a representação esquemática da fig. (II-10) juntamente com uma das expressões (II-47) ou (II-48) [Ver SZILARD <sup>[20]</sup>], temos a formulação completa em diferenças finitas centrais da equação (II-26).

#### 2.4.2.2. Condições de Contorno

Para uma solução completa do problema em estudo necessitamos atender às condições de contorno em cada ponto nodal dos bordos das placas. Através destas condições conseguiremos expressar a flecha dos pontos exteriores em função das flechas nos pontos interiores. Esta situação ocorrerá quando aplicarmos a "molécula" da fig. (II-10) num ponto nodal do bordo

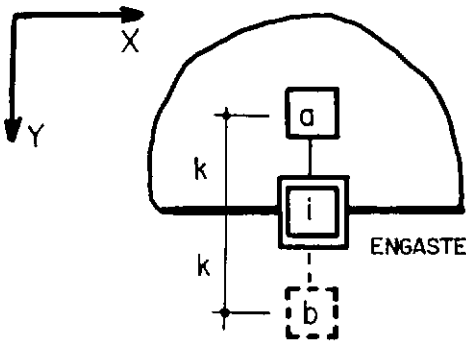
ou na vizinhança do mesmo.

Este procedimento será feito através da substituição das derivadas nas expressões matemáticas das várias condições de contorno, discutidas no item 2.3., pelas correspondentes expressões em diferenças finitas.

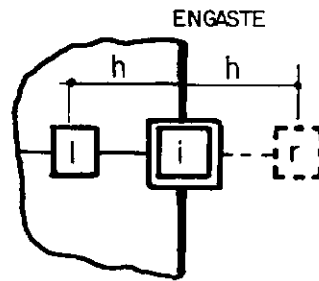
Passemos então a escrever essas condições em diferenças finitas.

A) Bordo engastado:  $w = 0$  e  $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$

Seja um bordo engastado paralelo a um dos eixos coordenados X-Y, conforme a fig. (II-11):



(a) BORDO PARALELO AO EIXO X



(b) BORDO PARALELO EIXO Y

FIGURA II-11

Usando-se as expressões (II-46a e b), as condições de contorno (II-33) se transformam em:

$$w_i = 0$$

(II-49a)

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i = \frac{1}{2h} (w_r - w_l) = 0 \Rightarrow w_r = w_l \quad (\text{II-49b})$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i = \frac{1}{2k} (w_b - w_a) = 0 \Rightarrow w_b = w_a \quad (\text{II-49c})$$

A condição de contorno para bordo engastado é semelhante ao caso de flexão isotérmica.

B) Bordo Simplesmente Apoiado:  $w = 0$  e  $M_n = 0$

O bordo simplesmente apoiado pode ser tratado de modo semelhante, conforme esquema da fig. (II-12)

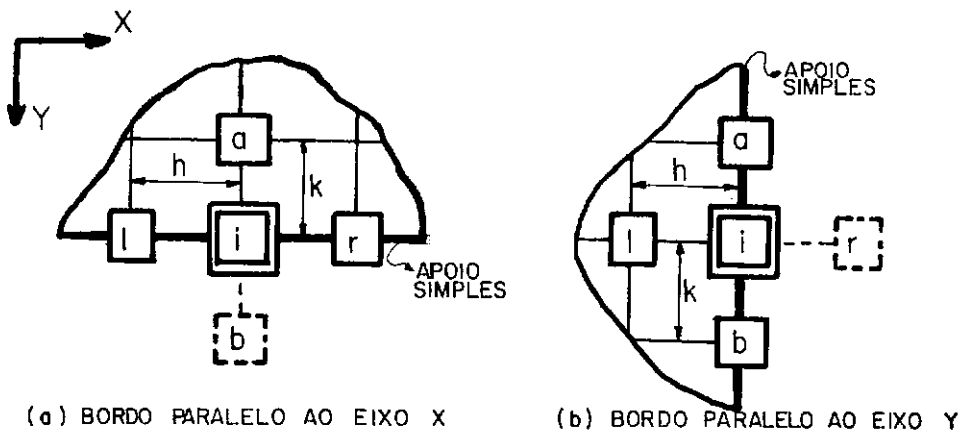


FIGURA II-12

Sabendo que  $w_i = w_l = w_r = 0$  ou ainda  $w_i = w_a = w_b = 0$  e utilizando as expressões (II-46c e d), as condições de contorno (II-38) e (II-37), se transformam respectivamente em:

- Bordo paralelo ao eixo X:

$$w_b = -w_a - \frac{k^2}{D} M_T^1 \quad (\text{II-50a})$$





Conforme fig. (II-13), temos:

Bordo livre paralelo ao eixo X

$$(M_Y)_i = 0 \Rightarrow w_b = 2 \left(1 + \frac{\nu}{\alpha^2}\right) w_i - w_a - \frac{\nu}{\alpha^2} (w_r + w_\ell) - \frac{k^2}{D} M_T^i \quad (\text{II-51a})$$

$$(M_Y)_l = 0 \Rightarrow w_{bl} = 2 \left(1 + \frac{\nu}{\alpha^2}\right) w_\ell - w_{al} - \frac{\nu}{\alpha^2} (w_{\ell\ell} + w_i) - \frac{k^2}{D} M_T^l \quad (\text{II-51b})$$

$$(M_Y)_r = 0 \Rightarrow w_{br} = 2 \left(1 + \frac{\nu}{\alpha^2}\right) w_r - w_{ar} - \frac{\nu}{\alpha^2} (w_i + w_{rr}) - \frac{k^2}{D} M_T^r \quad (\text{II-51c})$$

$$(V_Y)_i = 0 \Rightarrow \frac{D}{2k^3} \left[ -w_{aa} + 2w_{ar} - 2w_b + w_{bb} \right] + \frac{(2-\nu)D}{2kh^2} \left[ -w_{al} - w_{ar} + w_{bl} + w_{br} + \right. \\ \left. + 2w_a - 2w_b \right] = - \left( \frac{\partial M_T}{\partial y} \right)_i \quad (\text{II-51d})$$

Substituindo as expressões (II-51a,b,c) em (II-51d), chegamos a:

$$w_{bb} = \frac{\nu(2-\nu)}{\alpha^4} (w_{\ell\ell} + w_{rr}) + w_{aa} + \left( \frac{4-2\nu}{\alpha^2} \right) (w_{al} + w_{ar}) + \left( \frac{4\nu-4\alpha^2-8}{\alpha^2} \right) w_a + \\ + \left( \frac{4\nu^2-4\alpha^2-8\nu}{\alpha^4} \right) (w_\ell + w_r) + \left( \frac{8\alpha^2+4\alpha^4-6\nu^2+12\nu}{\alpha^4} \right) w_i - \left[ \frac{2k^2}{D} M_T^i + \right. \\ \left. + \frac{2k^3}{D} \left( \frac{\partial M_T}{\partial y} \right)_i - \left( \frac{2-\nu}{\alpha^2} \right) \frac{k^2}{D} (M_T^r + M_T^l - 2M_T^i) \right] \quad (\text{II-51e})$$

Procedendo de forma análoga, chegamos às seguintes expressões para um bordo livre paralelo ao eixo Y.

$$(M_x)_a = 0 \Rightarrow w_{ar} = 2(1+\alpha^2 v) w_a - w_{al} - \alpha^2 v(w_{aa} + w_i) - \frac{\alpha^2 k}{D} M_T^a \quad (\text{II-52a})$$

$$(M_x)_b = 0 \Rightarrow w_{br} = 2(1+\alpha^2 v) w_b - w_{bl} - \alpha^2 v(w_{bb} + w_i) - \frac{\alpha^2 k}{D} M_T^b \quad (\text{II-52b})$$

$$(M_x)_i = 0 \Rightarrow w_r = 2(1+\alpha^2 v) w_i - w_{\ell} - \alpha^2 v(w_a + w_b) - \frac{\alpha^2 k}{D} M_T^i \quad (\text{II-52c})$$

$$\begin{aligned} (V_x)_i = 0 \Rightarrow w_{rr} = & \alpha^4 v(2-v)(w_{aa} + w_{bb}) + w_{\ell\ell} + 2\alpha^2 (2-v)(w_{a\ell} + w_{b\ell}) + \\ & -4\left[\alpha^2 (2-v) + 1\right] w_{\ell} - 4\alpha^2 \left[1 + \alpha^2 v(2-v)\right] (w_a + w_b) + \left[\alpha^2 (2-v)(4 + 8\alpha^2 v) + 4(1 + \alpha^2 v)\right] w_i + \\ & + \frac{\alpha^4 (2-v)k^2}{D} (M_T^a + M_T^b - 2M_T^i) - \frac{2\alpha^2 k}{D} M_T^i - \frac{2\alpha^3 k}{D} \left(\frac{\partial M_T}{\partial x}\right)_i \end{aligned} \quad (\text{II-52d})$$

No caso particular de canto de placa formado pelo cruzamento de dois bordos livres, paralelos aos eixos coordenados (Ver fig. II-14), surge a necessidade de considerarmos uma condição de contorno adicional no cruzamento dos bordos (ponto nodal i), ao aplicarmos a molécula da fig. (II-10). Assim, teremos  $(M_{xy})_i = 0$ . Isto pode ser escrito em diferenças finitas centrais, utilizando-se (II-15) e (II-46j):

$$(M_{xy})_i \approx \frac{D(1-v)}{4hk} (w_{br} + w_{al} - w_{bl} - w_{ar}) = 0 \quad (\text{II-53})$$

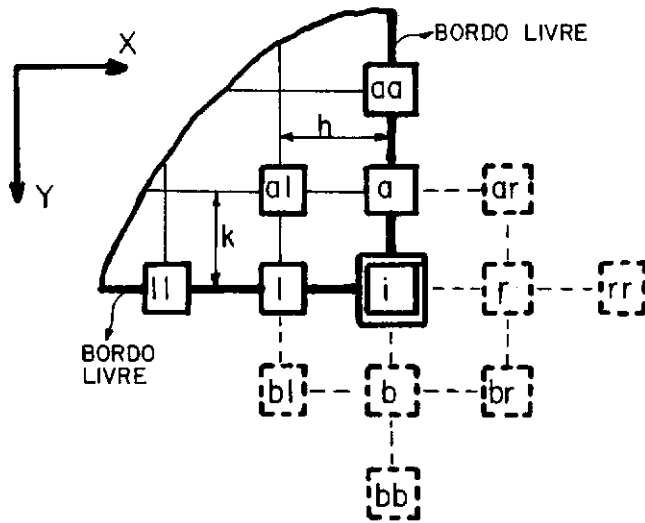


FIGURA II-14

Associada à condição (II-53) consideramos as seguintes expressões necessárias à resolução completa do problema da fig. (II-14):

$$\{M_x\}_a = 0; \{M_x\}_i = 0; \{V_x\}_i = 0; \{M_y\}_i = 0; \{M_y\}_l = 0; \{V_y\}_i = 0$$

Neste item 2.4.2.2., se anularmos os termos que envolvem o "momento fletor térmico equivalente"  $M_T$  [Ver equação (II-17)], ou suas derivadas, teremos as expressões, em diferenças finitas centrais, necessárias para tratar os contornos na flexão isotérmica de placas.

## 2.5. Aplicações

Apresentaremos nesta seção os resultados da aplicação da equação geral da fig. (II-10) aos bordos e cantos de

placa sob diversas condições de contorno. Pensamos desta forma facilitar o uso deste método nas aplicações práticas, uma vez que a grande dificuldade reside na obtenção rápida da equação geral em pontos do contorno ou próximo dele.

A nomenclatura usada para os índices refere-se à fig. (II-9), onde os dois retângulos concêntricos relacionam-se ao ponto  $i$ . (centro da "molécula").

### 2.5.1. Bordo Engastado

As condições de contorno (II-49) não apresentam influência dos efeitos térmicos. Assim a solução desejada é a mesma para o caso de placa engastada sujeita a uma temperatura uniforme e sob a ação da carga transversal fictícia

$$p_z^*(x,y) = -\nabla^2 M_T.$$

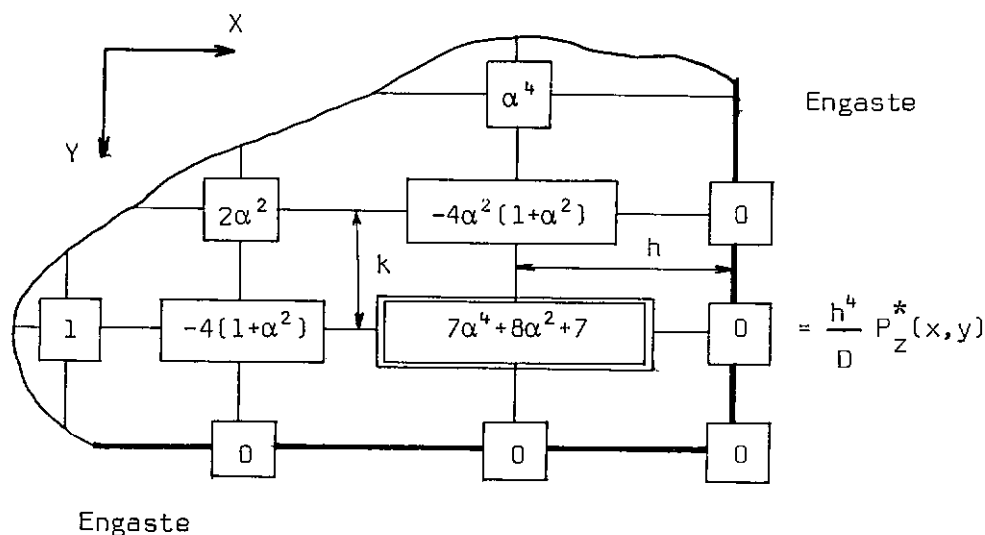


FIGURA (II-15) - Bordo engastado ( $\alpha = h/k$ )



### 2.5.2. Bordo Simplesmente Apoiado

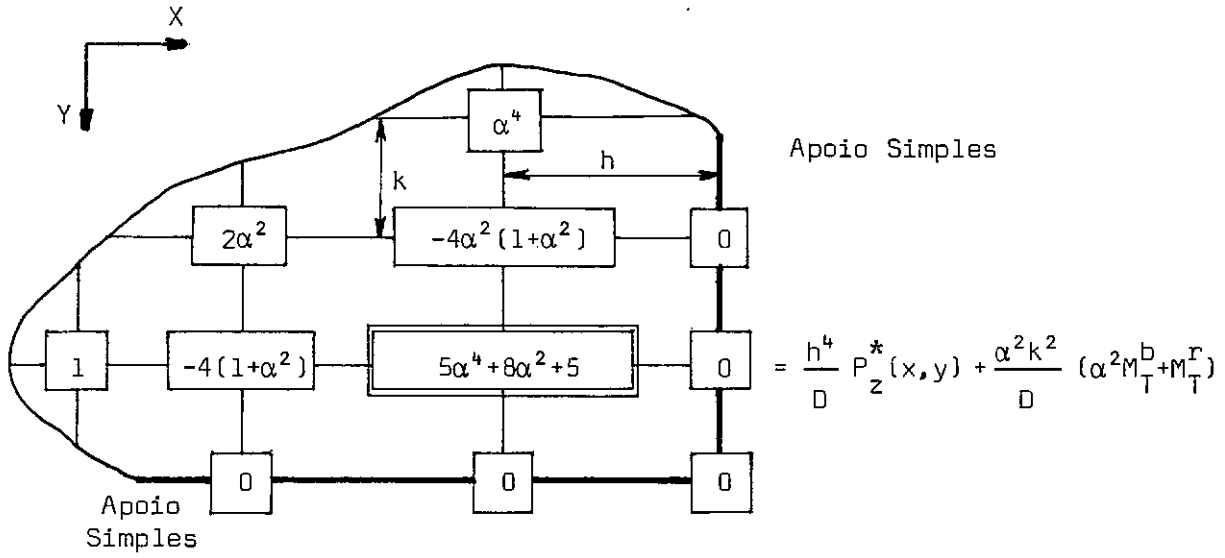


FIGURA (II-18) - Bordo Simplesmente Apoiado ( $\alpha = h/k$ )

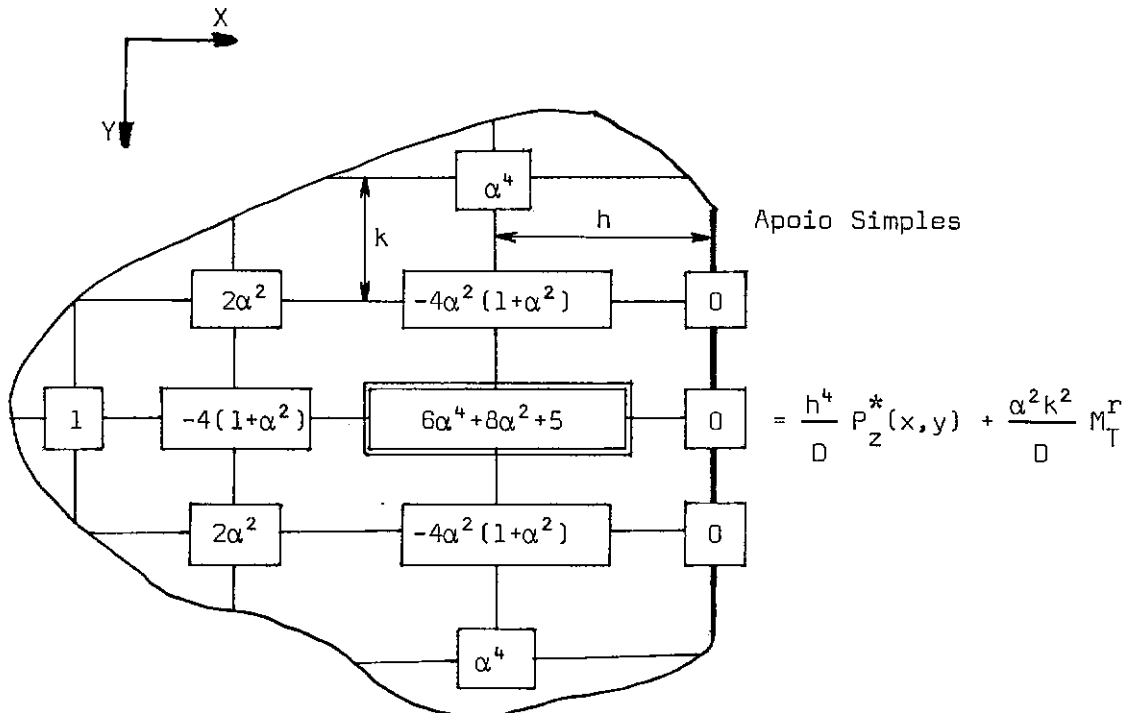


FIGURA (II-19) - Bordo Simplesmente Apoiado paralelo ao eixo Y ( $\alpha = h/k$ )



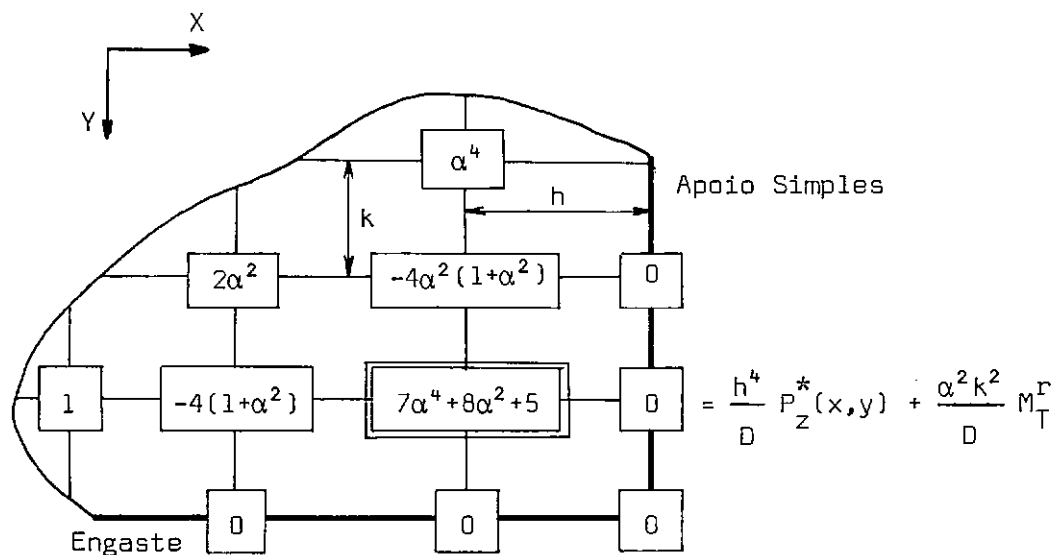


FIGURA (II-22) - Bordo Engastado e Simplesmente Apoiado, com Engaste paralelo ao eixo  $x$  ( $\alpha = h/k$ )

#### 2.5.4. Bordo Livre

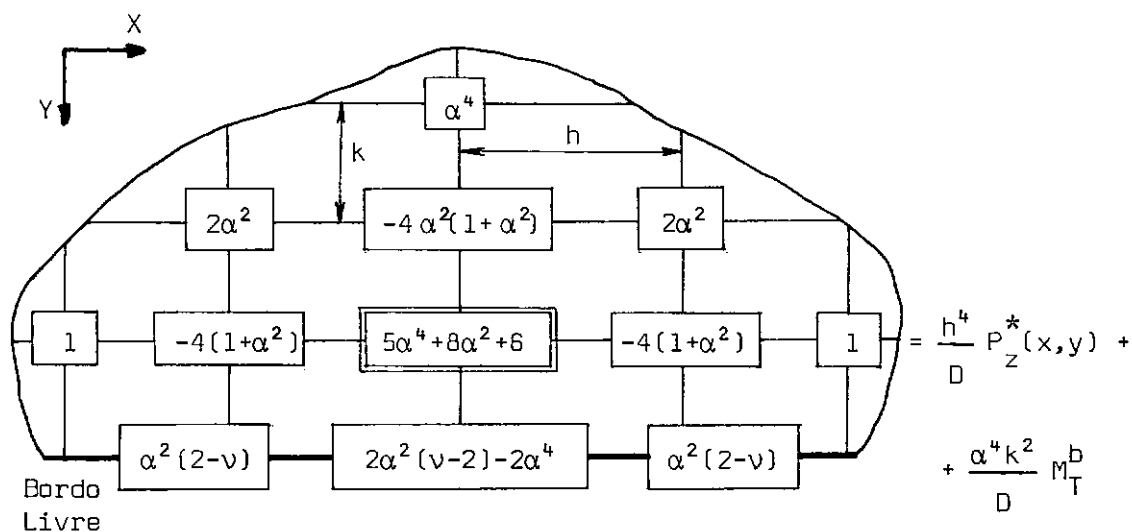
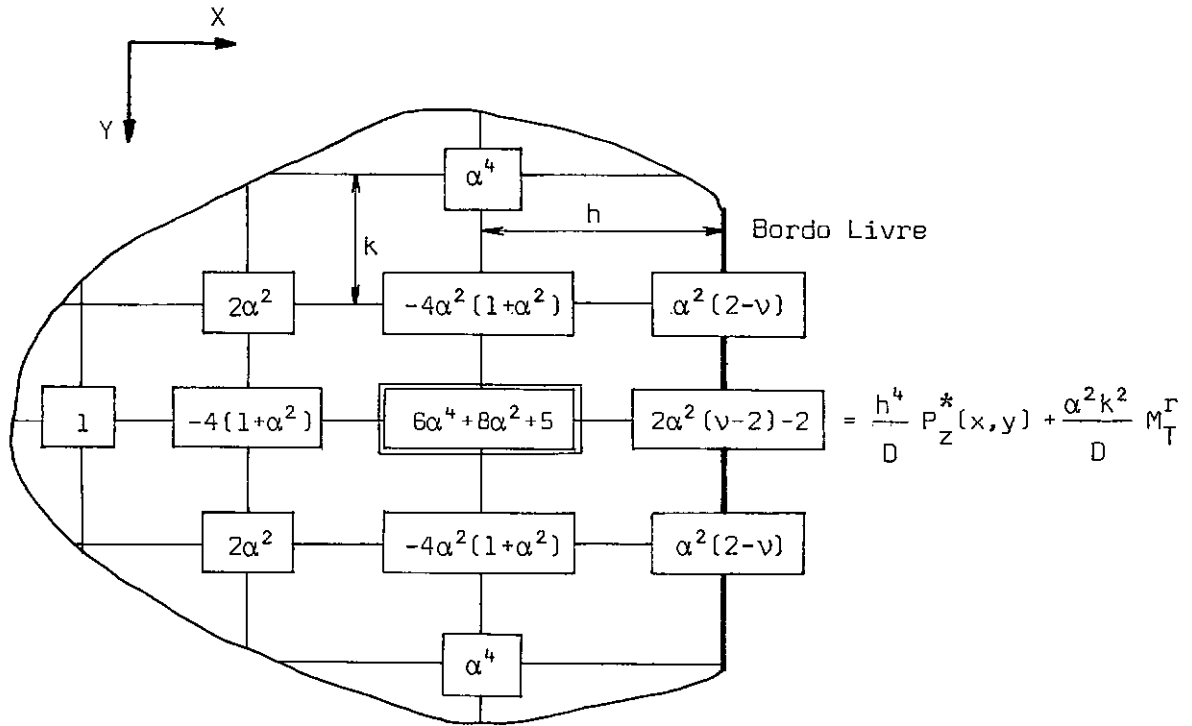
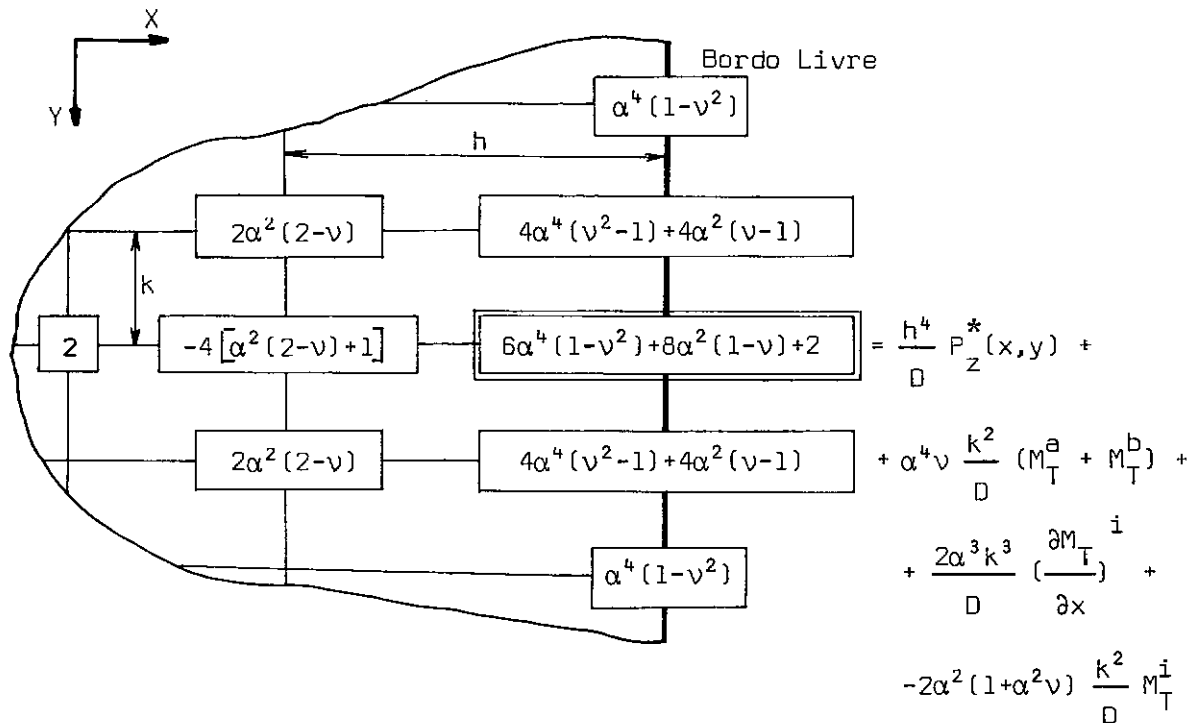
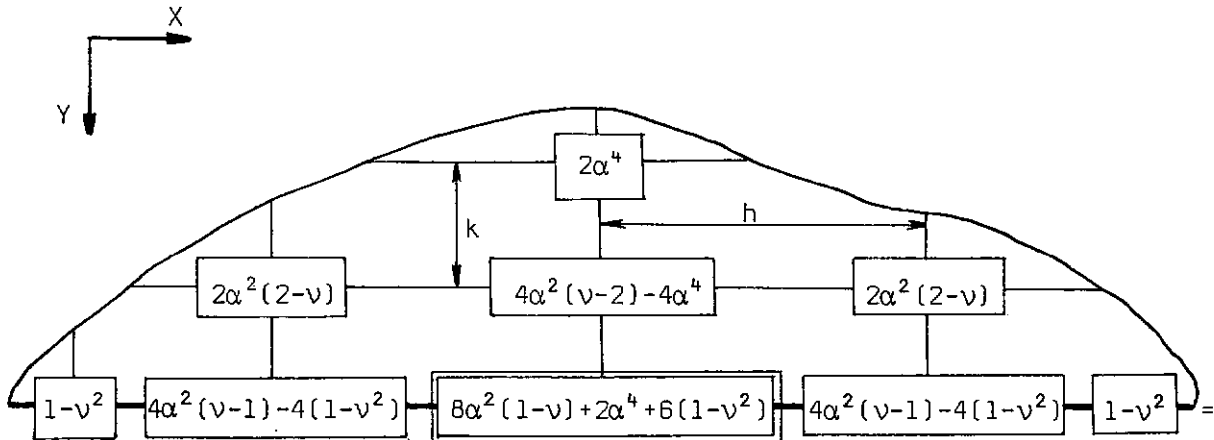


FIGURA (II-23) - Bordo Livre paralelo ao eixo  $x$  ( $\alpha = h/k$ )



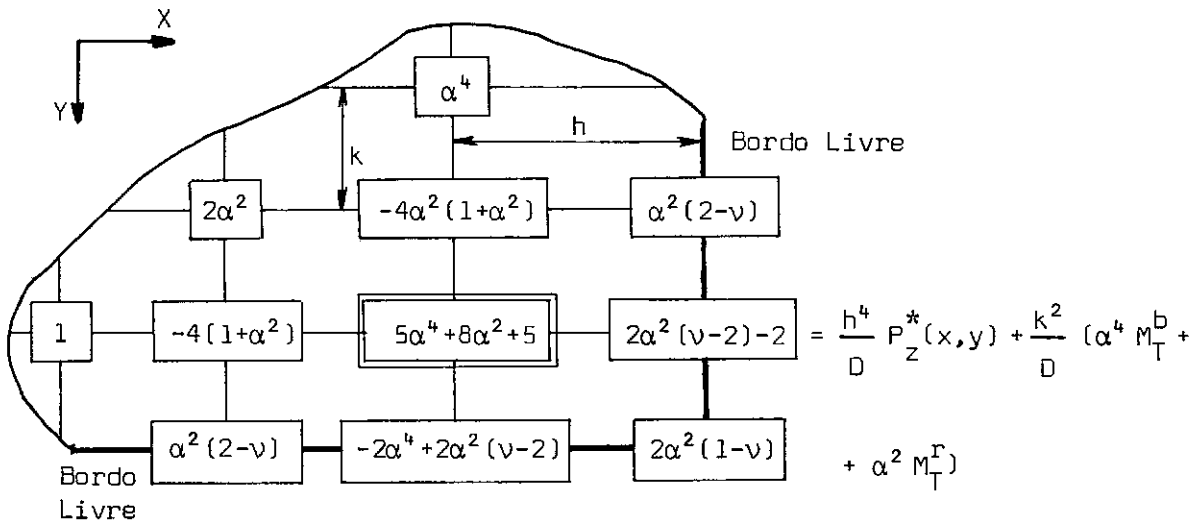
FIGURA (II-24) - Bordo Livre paralelo ao eixo y ( $\alpha = h/k$ )FIGURA (II-25) - Bordo Livre paralelo ao eixo y ( $\alpha = h/k$ )



Bordo Livre

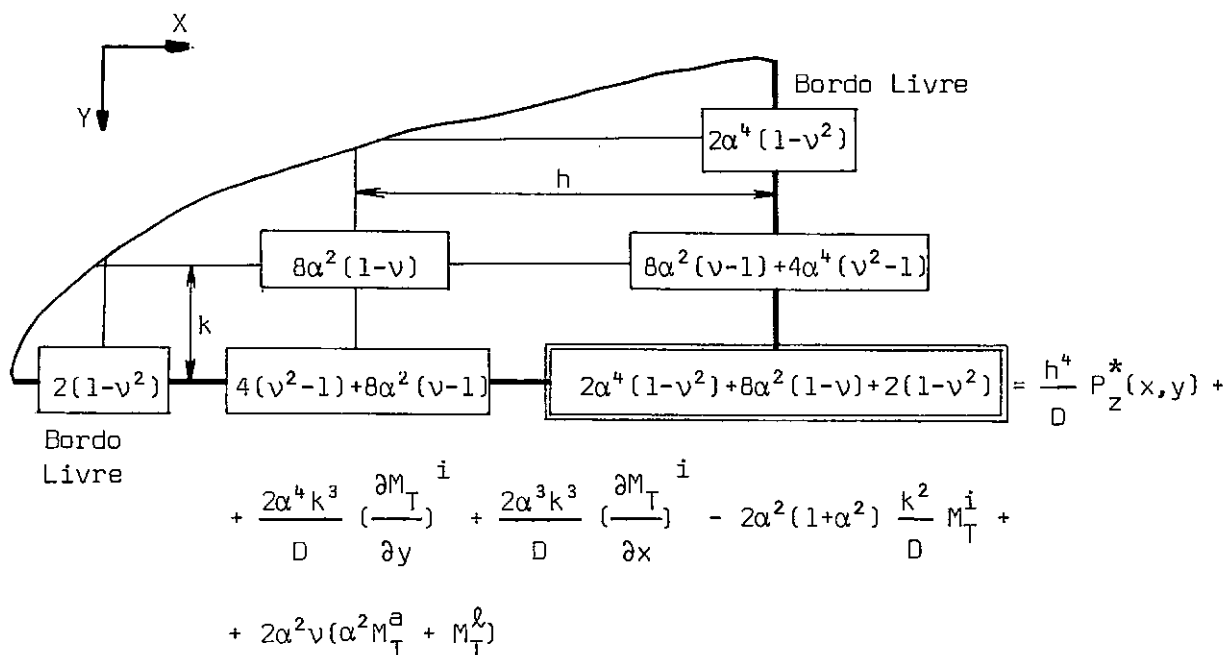
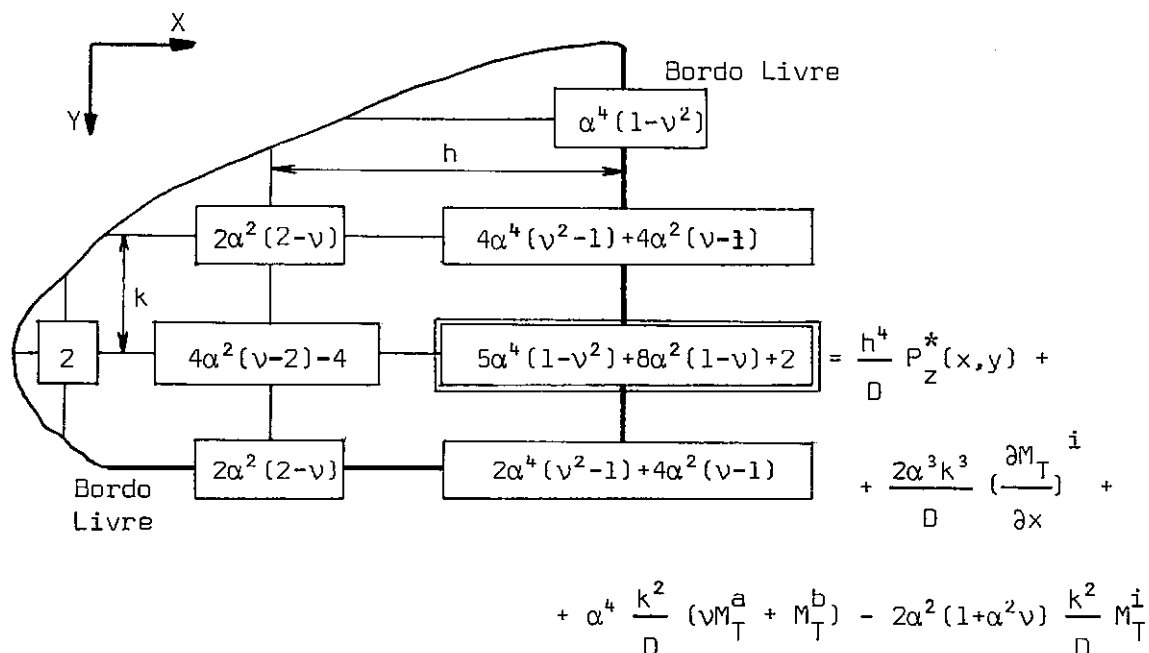
$$= \frac{h^4}{D} P_z^*(x, y) + \alpha^2 \nu \frac{k^2}{D} (M_T^r + M_T^l) - \frac{2\alpha^2(\alpha^2 + \nu)}{D} M_T^i + \frac{2\alpha^4 k^3}{D} \left( \frac{\partial M_T^i}{\partial y} \right)$$

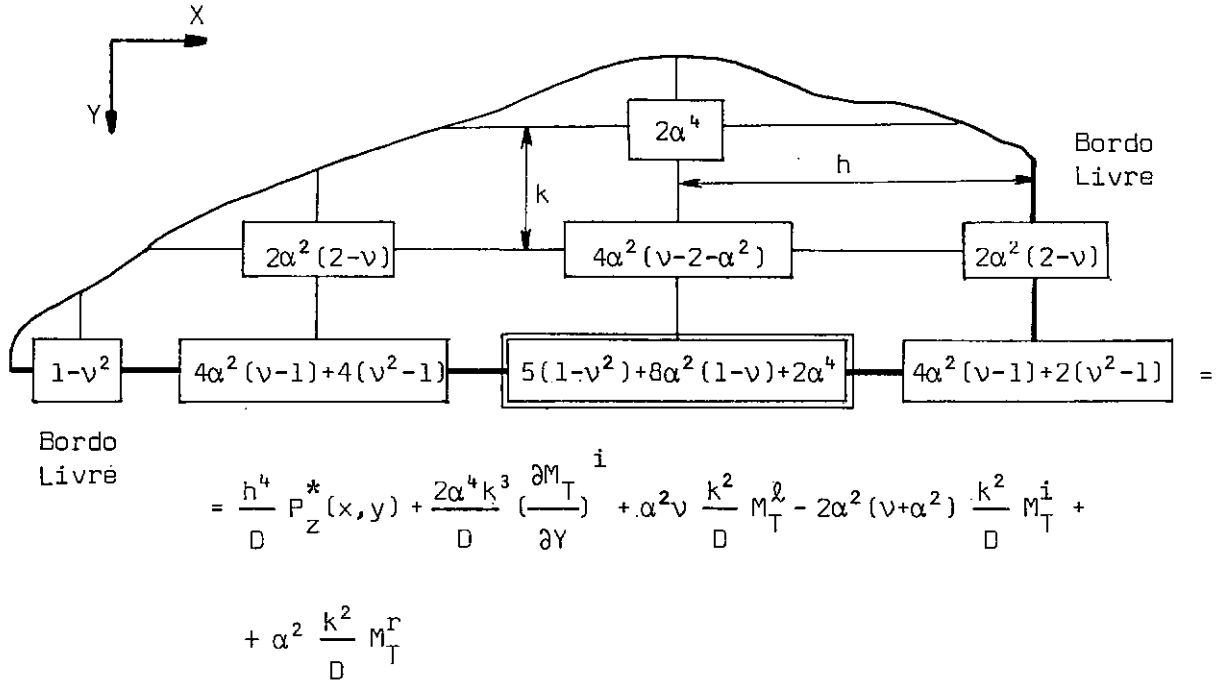
FIGURA (II-26) - Bordo Livre paralelo ao eixo x ( $\alpha = h/k$ )



$$= \frac{h^4}{D} P_z^*(x, y) + \frac{k^2}{D} (\alpha^4 M_T^b + \alpha^2 M_T^r)$$

FIGURA (II-27) - Bordo Livre ( $\alpha = h/k$ )

FIGURA (II-28) - Bordo Livre ( $\alpha = h/k$ )FIGURA (II-29) - Bordo Livre ( $\alpha = h/k$ )

FIGURA (II-30) - Bordo Livre ( $\alpha = h/k$ )

### 2.5.5. Bordo Engastado e Bordo Livre

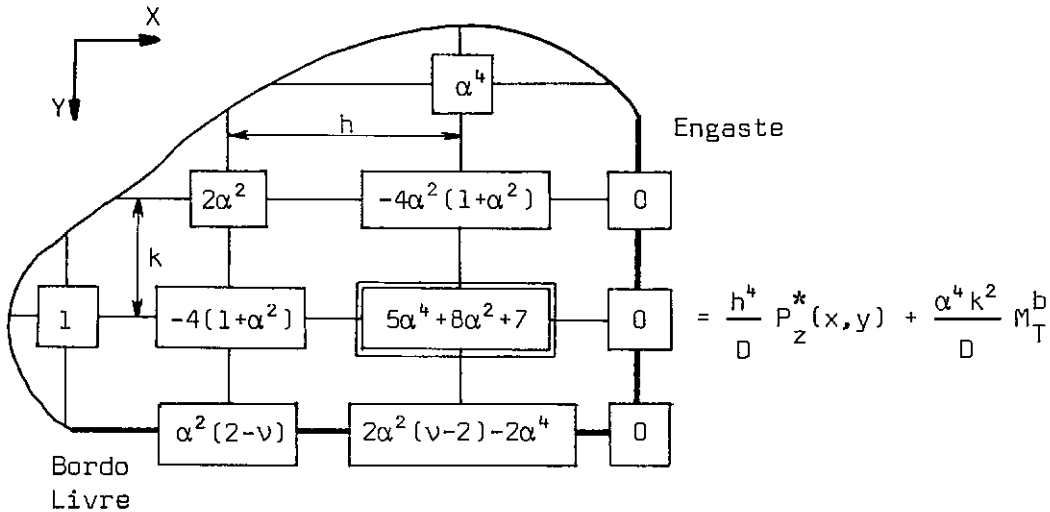


FIGURA (II-31) - Bordo Engastado e Livre, com engaste paralelo ao eixo  $y$   
 ( $\alpha = h/k$ )

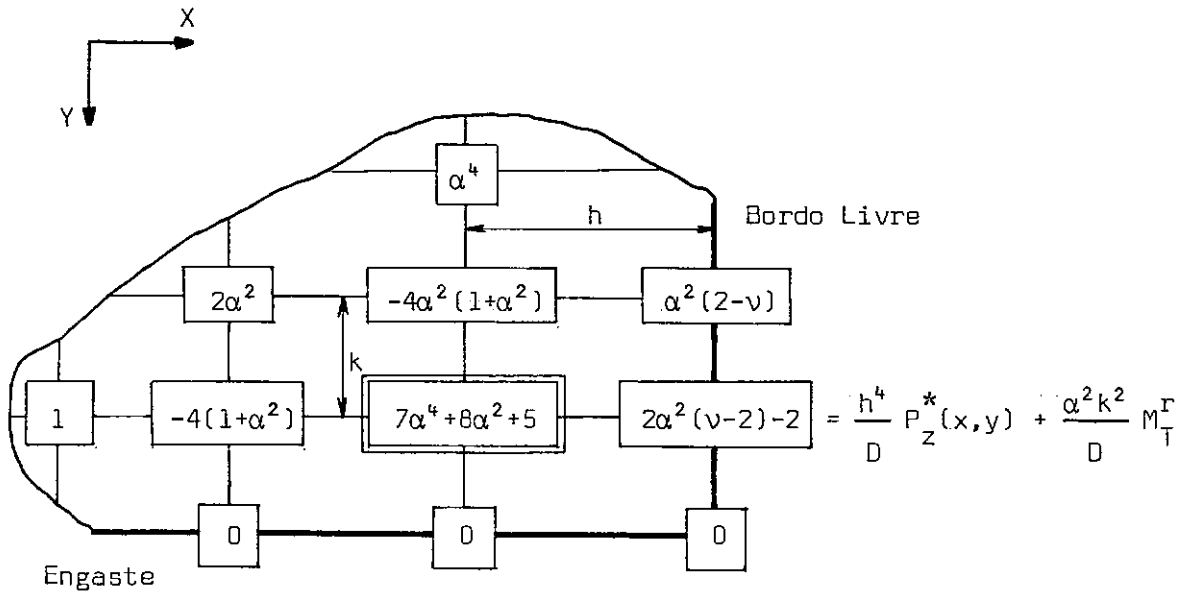


FIGURA (II-32) - Bordo Engastado e Livre, com engaste paralelo ao eixo  $x$   
 $(\alpha = h/k)$

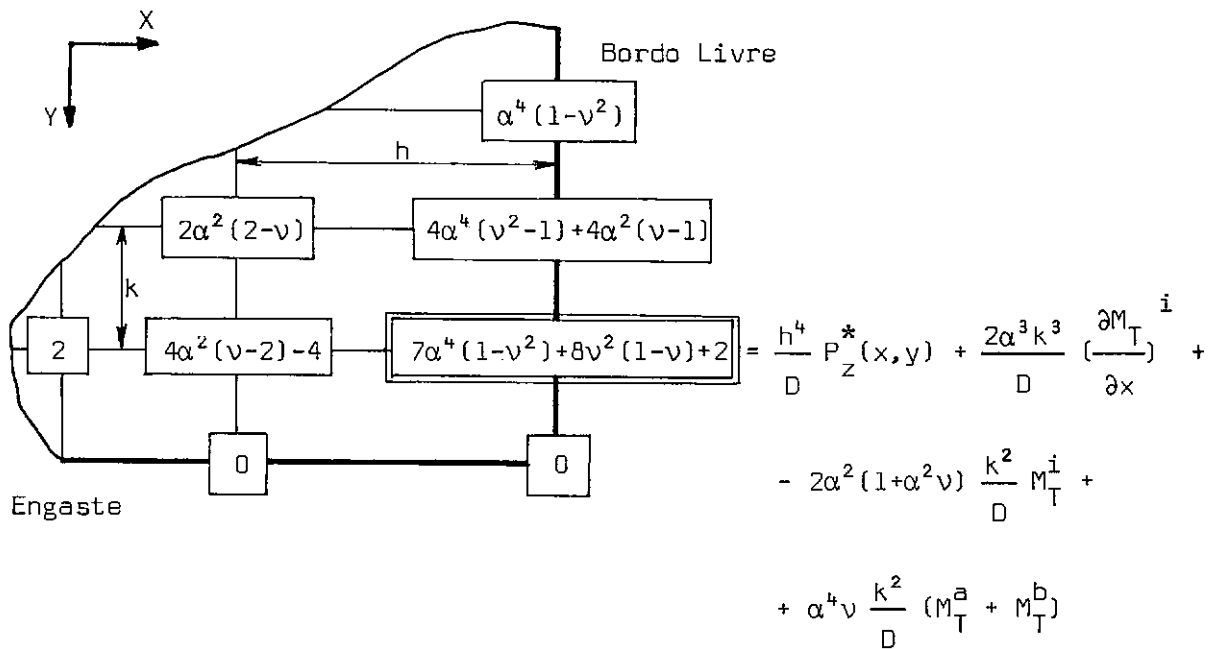


FIGURA (II-33) - Bordo Engastado e Livre, com engaste paralelo ao eixo  $x$   
 $(\alpha = h/k)$

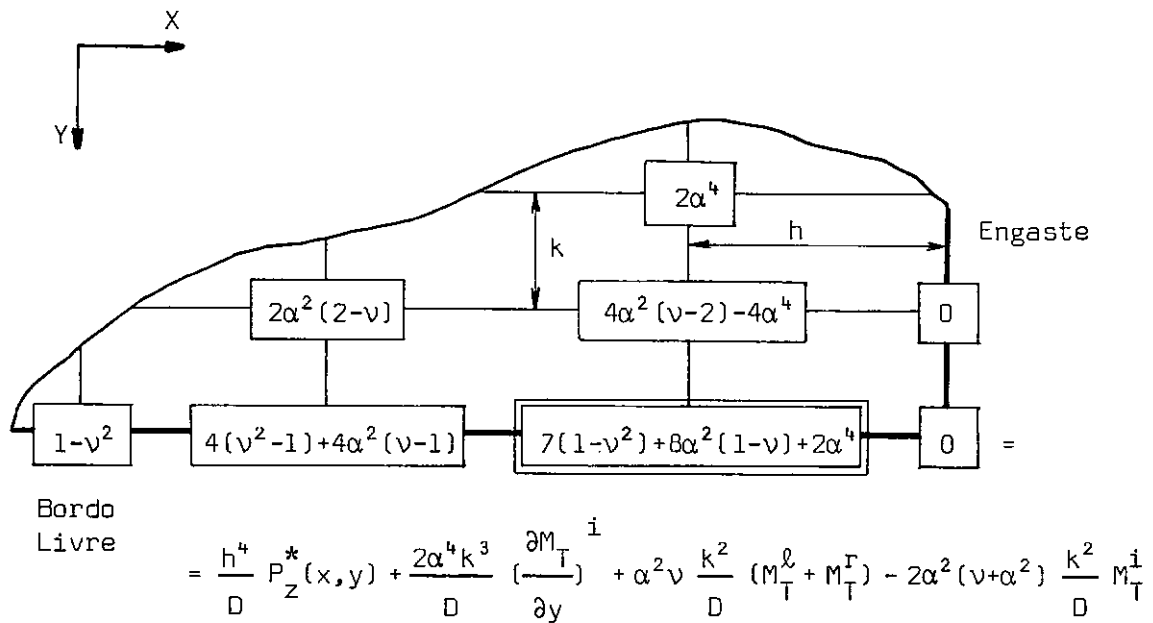
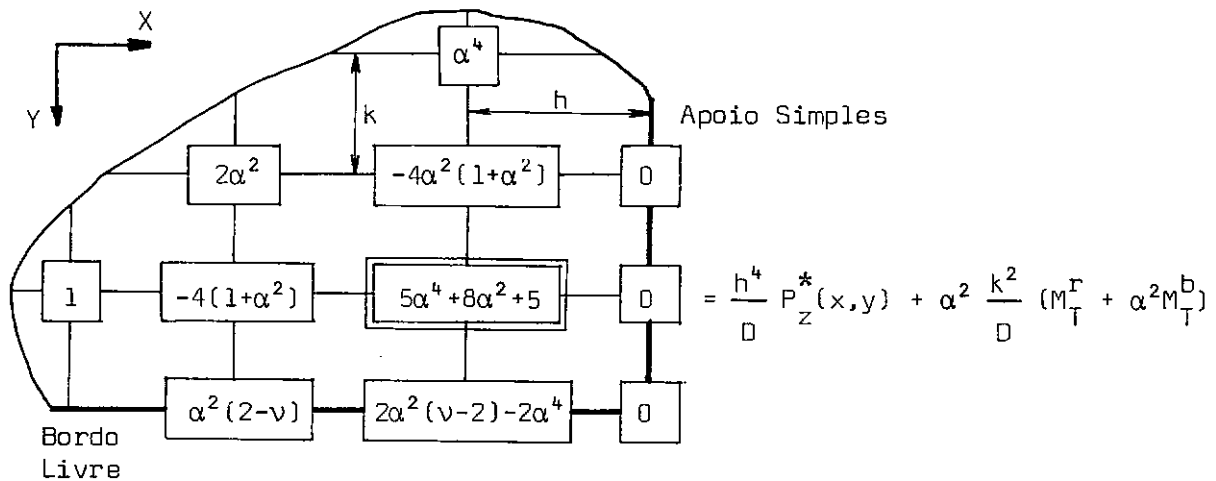


FIGURA (II-34) - Bordo Engastado e Livre, com engaste paralelo ao eixo y

$$(\alpha = h/k)$$

#### 2.5.6. Bordo Simplesmente Apoiado e Bordo Livre

FIGURA (II-35) - Bordo Livre e Simplesmente Apoiado com Bordo Livre paralelo ao eixo x ( $\alpha = h/k$ )

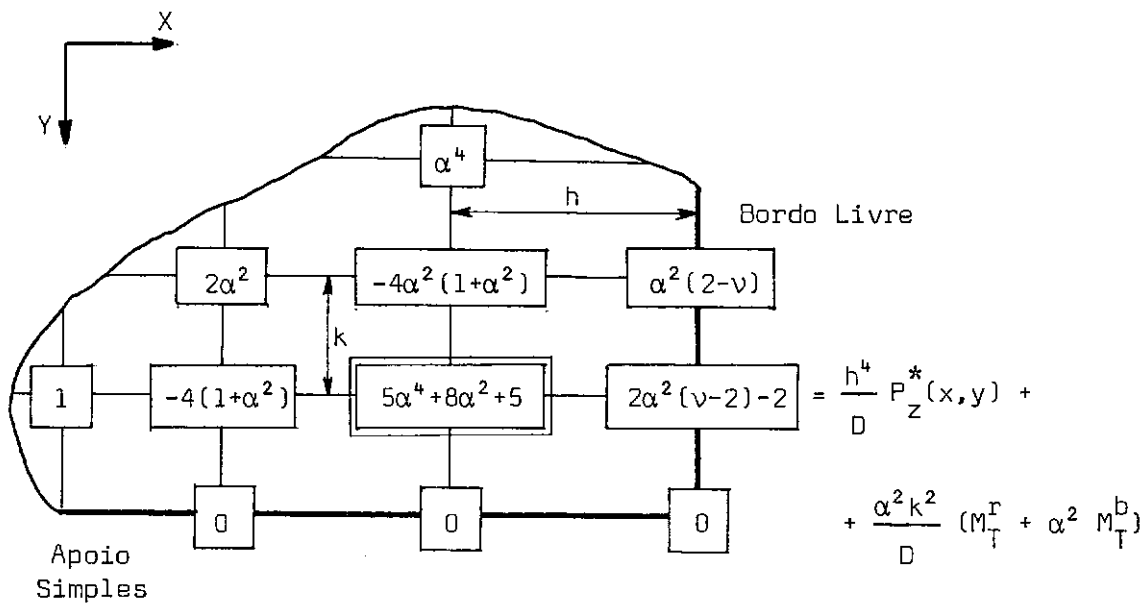


FIGURA (II-36) - Bordo Livre e Simplesmente Apoiado com Bordo Livre paralelo ao eixo  $y$  ( $\alpha = h/k$ )

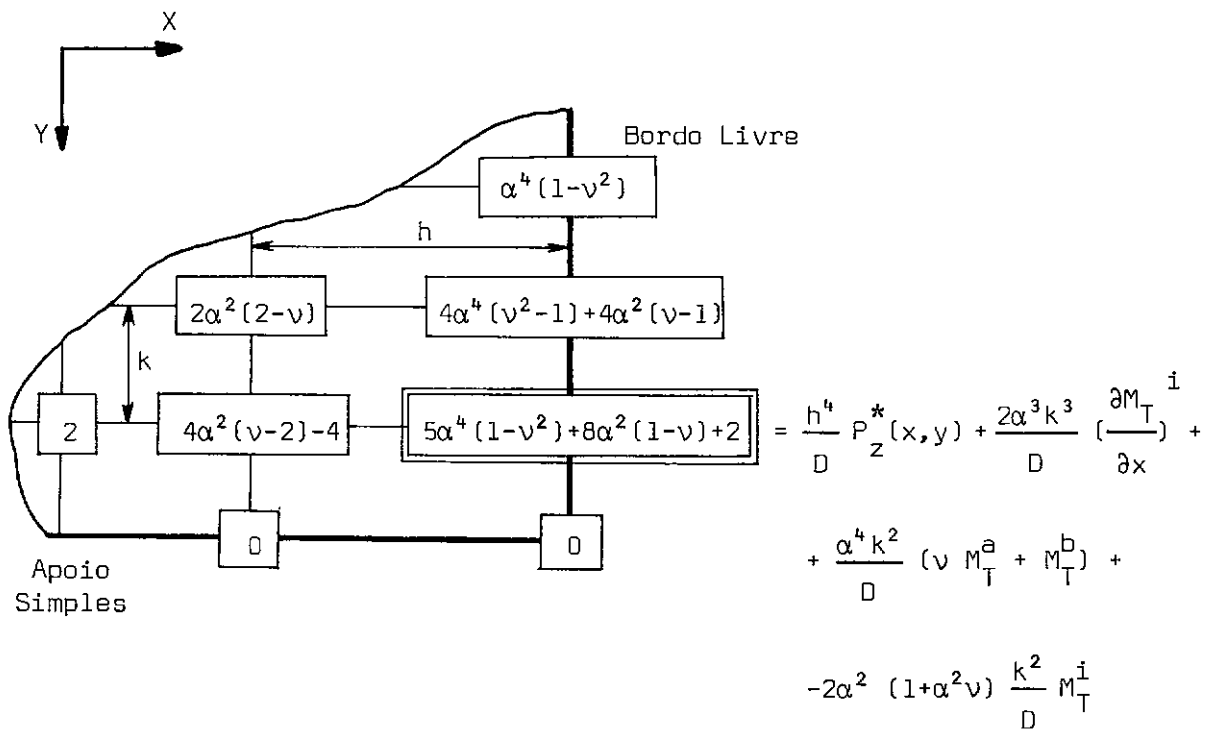


FIGURA (II-37) - Bordo Livre e Simplesmente Apoiado com Bordo Livre paralelo ao eixo y ( $\alpha = h/k$ )

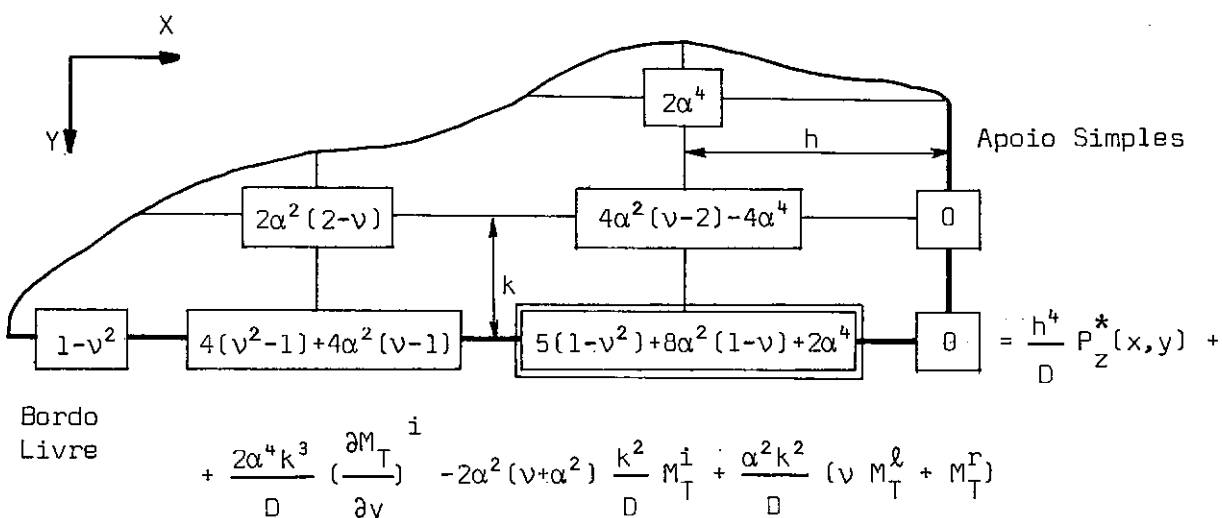


FIGURA (II-38) - Bordo Livre e Simplesmente Apoiado com Bordo Livre paralelo ao eixo  $x$  ( $\alpha = h/k$ )

## 2.6. Obtenção dos esforços

Aplicando a equação de flexão térmica [veja figura (II-10)] em todos os pontos da malha em que foi dividida a placa, nos quais as flechas são desconhecidas, chegaremos a um sistema de equações lineares simultâneas que pode ser escrito na forma:

$$[K]\{w\} = \{Q\} \quad (II-54)$$

Onde  $[K]$  é a matriz quadrada formada pelos coeficientes em diferenças finitas,  $\{w\}$  é o vetor das flechas incógnitas, e  $\{Q\}$  o vetor das forças fictícias. A solução da equação (II-54) fornece as flechas, e estas serão substituídas nas equações em diferenças finitas, apresentadas na fig. (II-39), para determinação dos esforços resultantes em cada ponto da malha.



$$(M_x)_i \approx -\frac{D}{h^2} \left[ \begin{array}{c} \alpha^2 \nu \\ \boxed{1} - \boxed{-2(1+\alpha^2 \nu)} - \boxed{1} \\ \alpha^2 \nu \end{array} \right] \{w\} - M_T^i$$

$$(M_y)_i \approx -\frac{D}{h^2} \left[ \begin{array}{c} \alpha^2 \\ \boxed{\nu} - \boxed{-2(\alpha^2 + \nu)} - \boxed{\nu} \\ \alpha^2 \end{array} \right] \{w\} - M_T^i$$

$$(M_{xy})_i \approx \frac{D(1-\nu)}{4\alpha k^2} \left[ \begin{array}{ccc} \boxed{1} & & \boxed{-1} \\ & \boxed{0} & \\ \boxed{-1} & & \boxed{1} \end{array} \right] \{w\}$$

$$(V_x)_i \approx -\frac{D}{2h^3} \left[ \begin{array}{cccc} & \boxed{-\alpha^2(2-\nu)} & & \boxed{\alpha^2(2-\nu)} \\ & | & & | \\ \boxed{-1} & \boxed{2+\alpha^2(4-2\nu)} & \boxed{0} & \boxed{-2-\alpha^2(4-2\nu)} & \boxed{1} \\ & | & & | \\ & \boxed{-\alpha^2(2-\nu)} & & \boxed{\alpha^2(2-\nu)} \end{array} \right] \{w\} - \left( \frac{\partial M_T}{\partial x_i} \right)$$

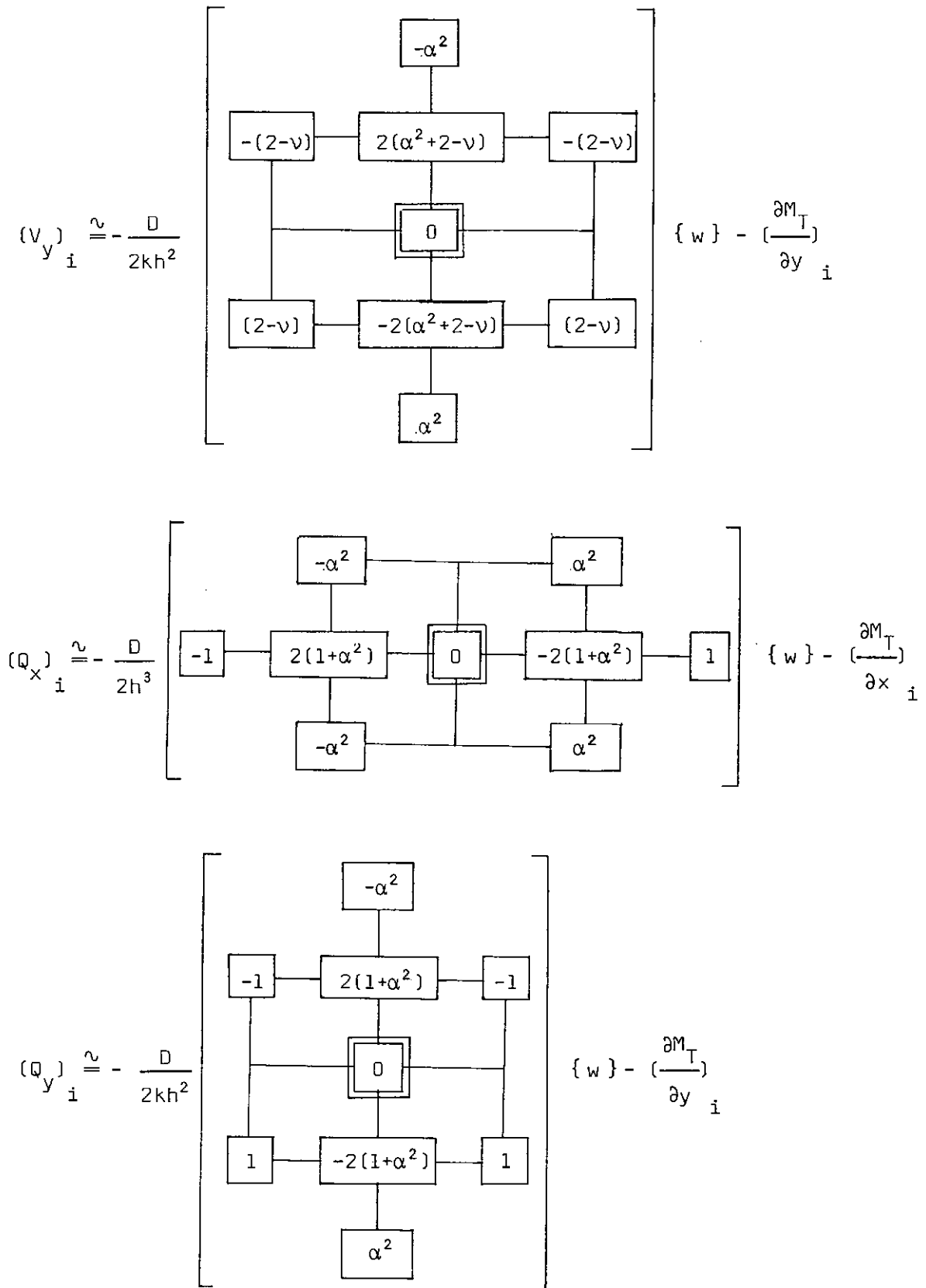


FIGURA (II-39) - Expressões em diferenças finitas, para cálculo dos esforços usando malha retangular ( $\alpha = h/k$ )

### CAPÍTULO III

#### PLACAS RETANGULARES SOBRE BASE ELÁSTICA.

##### 3.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS E HIPÓTESES BÁSICAS

Muitos problemas de interesse prático podem ser en-  
globados na análise de placas sobre base elástica. Algumas das  
aplicações diretas desta análise são as lajes de pavimentos de  
rodovias e de aeroportos.

Vamos assumir que o material da base é homogêneo,  
isotrópico e linearmente elástico. Este tipo de base é chama-  
da "base do tipo WINKLER". Esta hipótese consiste numa aproxi-  
mação das reais condições do material da base. Maior precisão  
pode ser obtida se considerarmos as deformações reais dessa ba-  
se.

As hipóteses consideradas no capítulo II, mais espe-  
cificamente no item 2.1., serão estendidas para a presente aná-  
lise.

##### 3.2. EQUAÇÕES BÁSICAS

A intensidade da reação da base,  $p_b(x,y)$ , tendo em  
vista as hipóteses anteriores, será considerada em qualquer  
ponto da placa, proporcional à flecha deste ponto, podendo ser

expressa pela seguinte relação:

$$p_b(x,y) = \mu w(x,y) \quad (\text{III-1})$$

onde  $\mu$  é o "coeficiente de mola" da base, cujo valor numérico representa a pressão que aplicada nesta base provoque um recalque unitário.

Quando uma placa é sustentada por uma fundação elástica contínua, a carga externa total na direção transversal é composta de três parcelas: a carga de superfície  $p_z(x,y)$ ; a reação da fundação (vertical de baixo para cima)  $p_b(x,y)$ ; o carregamento fictício  $p_z^*(x,y) = -\nabla^2 M_T$ .

Assim a equação diferencial para placas sobre base elástica sujeita a um campo térmico estacionário  $T(x,y,z)$  e cargas transversais externas, pode ser escrita como:

$$D\nabla^4 w = p_z(x,y) - p_b(x,y) + p_z^*(x,y) \quad (\text{III-2})$$

Nesta equação diferencial parcial de quarta ordem, a reação  $p_b(x,y)$ , exercida pela fundação é também desconhecida, pois depende também das flechas  $w(x,y)$ , segundo (III-1). Introduzindo (III-1) em (III-2), escrevemos:

$$D\nabla^4 w + \mu w = p_z(x,y) - \nabla^2 M_T \quad (\text{III-3})$$

Se somente os efeitos da atuação do campo térmico  $T(x,y,z)$  são desejados podemos considerar  $p_z(x,y)$  nulo e a

equação geral de flexão térmica de placas sobre base elástica se transforma em:

$$D \nabla^4 w + \mu w = - \nabla^2 M_T \quad (\text{III-4})$$

Estas duas últimas equações mostram que a superposi  
ção dos efeitos do campo térmico e cargas transversais, atua  
do separadamente, é possível.

As expressões dos esforços internos permanecem as  
mesmas.

### 3.3. CONDIÇÕES DE CONTORNO

A equação (III-4) deve ser resolvida através da con  
sideração apropriada das condições de contorno das placas. As  
sim, temos:

Bordo Engastado:  $w = 0$  e  $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$

Bordo simplesmente apoiado :  $w = 0$  e  $M_n = 0$

Bordo livre:  $M_n = 0$  e  $V_n = 0$

onde a nomenclatura usada aqui é a mesma da seção  
2.3. do capítulo anterior.



fig. (II-10), o termo  $(\mu/D) \propto k^4$ . Assim, com este procedimento nas "moléculas" das fig. (II-15) a (II-38), temos a análise completa da flexão de placas retangulares sobre base elástica.

## CAPÍTULO IV

### PLACAS CIRCULARES

#### 4.1. Introdução

Neste capítulo estudaremos as placas circulares de espessura constante( $t$ ) e isotrópicas, considerando-se as hipóteses descritas no CAP. II.

Deduziremos as equações fundamentais gerais e em seguida as equações fundamentais particulares relativas ao caso de aquecimento com simetria axial. Será usado o método das diferenças finitas, aplicado a placas e setores circulares.

#### 4.2. Equações Gerais

Referimos a superfície média da placa a um sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$ , fig. (IV-1), com centro em  $O$ . Designamos por  $z$  a coordenada segundo a normal à mesma superfície.



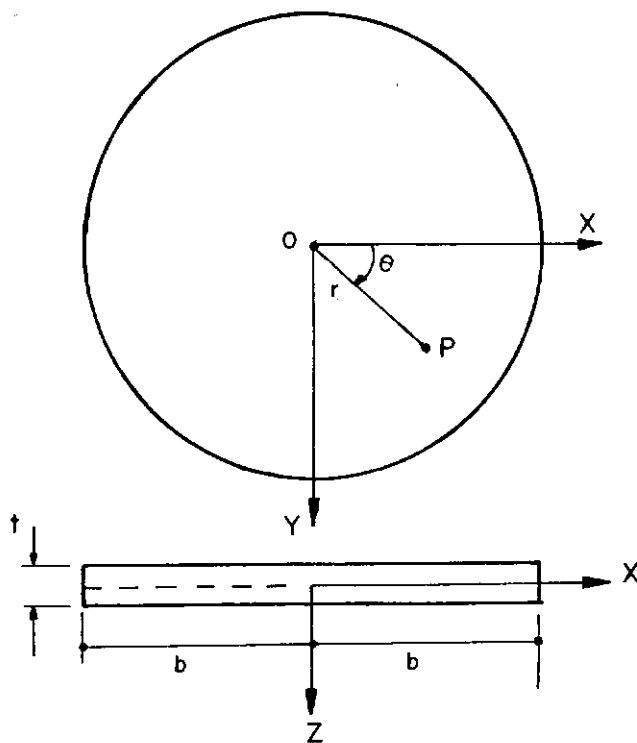


FIGURA IV-1

A obtenção das equações gerais para placas circulares pode ser feita através da aplicação da transformação de coordenadas, sobre as equações gerais em coordenadas cartesianas, obtidas no capítulo II.

A partir do uso desta técnica apresentada em literatura corrente TIMOSHENKO [22], BORG [8] chegamos a equação geral de flexão térmica de placas circulares em coordenadas polares:

$$D \nabla_r^2 \nabla_r^2 w = p_z(r, \theta) - \nabla_r^2 M_T \quad (\text{IV-1})$$

onde o operador de Laplace  $\nabla^2$ , em coordenadas cartesianas, transforma-se em:

$$\nabla_r^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (\text{IV-2})$$

O "momento fletor térmico equivalente"  $M_T$ , passa a ser definido por:

$$M_T = \frac{E\alpha_T}{1-\nu} \int_{-t/2}^{t/2} T(r, \theta, z) z \, dz \quad (\text{IV-3})$$

Os esforços internos, momentos e forças cortantes por unidade de comprimento, em coordenadas polares se escrevem:

$$M_r = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] - M_T \quad (\text{IV-4a})$$

$$M_\theta = -D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] - M_T \quad (\text{IV-4b})$$

$$M_{r\theta} = (1-\nu) D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = -M_{\theta r} \quad (\text{IV-4c})$$

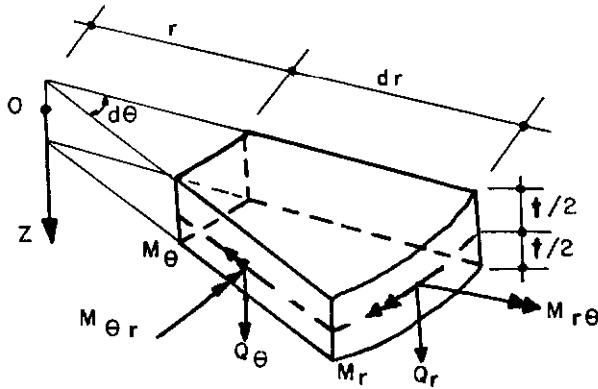
$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \left( \nabla_r^2 w + \frac{M_T}{D} \right) \quad (\text{IV-4d})$$

$$Q_\theta = -\frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \nabla_r^2 w + \frac{M_T}{D} \right) \quad (\text{IV-4e})$$

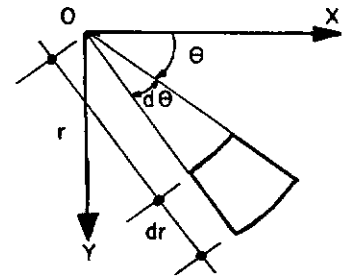
$$V_r = Q_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} M_{r\theta} = -D \left[ \frac{\partial}{\partial r} \nabla_r^2 w + \frac{1-\nu}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] - \frac{\partial M_T}{\partial r} \quad (\text{IV-4f})$$

$$V_\theta = Q_\theta + \frac{\partial M_{\theta r}}{\partial r} = -D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla_r^2 w + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial M_T}{\partial \theta} \quad (\text{IV-4g})$$

Onde  $V_r$  e  $V_\theta$  são as forças verticais totais por unidade de comprimento dos bordos cujas normais são  $r$  e  $\theta$ , respectivamente. São considerados positivos os esforços com os sentidos indicados na fig. (IV-2).



(a) Sentido positivo dos esforços internos



(b) Elemento de placa

FIGURA IV-2

#### 4.3. Condições de Contorno

A equação (IV-1) que governa a flexão térmica de placas circulares em coordenadas polares deve ser resolvida com o auxílio das condições de contorno. Analisaremos os bordos engastados, simplesmente apoiados e livres.

##### 4.3.1. Bordo Engastado

A flecha e a rotação na direção normal ao bordo devem ser nulas, ou seja:  $w = 0$   $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$  (IV-5)

#### 4.3.2. Bordo Simplesmente Apoiado

$$w = 0 \quad M_n = 0 \quad (\text{IV-6a})$$

Conforme a fig. (IV-3), podemos fazer as seguintes considerações:

Para um bordo  $\theta = \text{Cte}$ , teremos:  $w = 0$  e  $M_\theta = 0$

Para um bordo  $r = \text{Cte}$ , teremos:  $w = 0$  e  $M_r = 0$

$$\text{Bordo } \theta = \text{Cte, temos: } \left\{ \begin{array}{l} w = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = - \frac{M_T}{D} \end{array} \right. \quad (\text{IV-6b})$$

$$\text{Bordo } r = \text{Cte, temos: } \left\{ \begin{array}{l} w = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = - \frac{M_T}{D} \end{array} \right. \quad (\text{IV-6c})$$

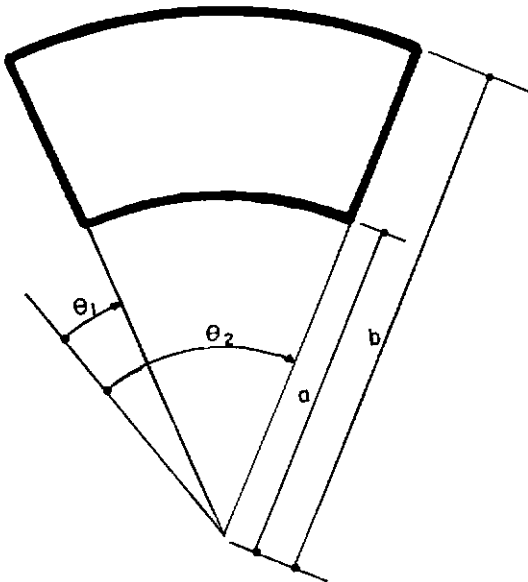


FIGURA IV-3 - Setor circular

#### 4.3.3. Bordo Livre

A componente tangencial do momento fletor (vetor de se

ta dupla), bem como a força vertical total por unidade de comprimento de bordo devem ser nulos, ou seja:

$$M_n = 0 \quad \text{e} \quad V_n = 0 \quad (\text{IV-7})$$

#### 4.4. Método de Solução

##### 4.4.1. Equação Geral em Diferenças Finitas

Para obter a expressão, em diferenças finitas centrais, para a equação geral de flexão térmica de placas circulares sujeitas somente a ação de um campo térmico  $T(r, \theta, z)$ , torna-se necessário desenvolver a equação (IV-1), simplificada:

$$D \nabla_r^2 \nabla_r^2 w = - \nabla_r^2 M_T \quad (\text{IV-8})$$

onde passamos a chamar:  $p_z^*(r, \theta) = - \nabla_r^2 M_T$  como carregamento fictício por unidade de área.

Desenvolvendo a expressão (IV-8), temos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} = \\ & = p_z^*(r, \theta)/D \end{aligned} \quad (\text{IV-9})$$

Substituindo cada uma das parcelas da expressão anterior pela correspondente expressão em diferenças finitas centrais,

trais [equações (II-46)], chegaremos à "molécula" representada de forma simbólica na fig. (IV-4)

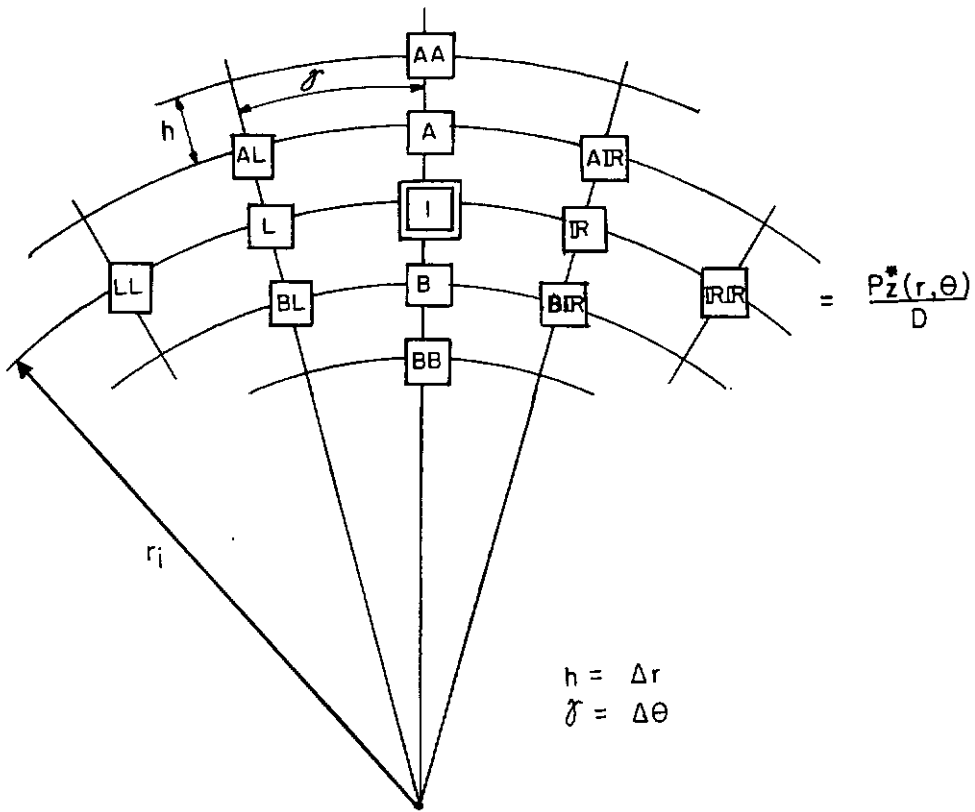


FIGURA IV-4

Onde:

$$AA = \frac{1}{h^4} + \frac{1}{r_i^3 h^3}$$

$$A = -\frac{4}{h^4} - \frac{2}{h^3 r_i} - \frac{1}{r_i^2 h^2} + \frac{1}{2hr_i^3} + \frac{2}{\gamma hr_i^3} - \frac{4}{r_i^2 \gamma h^2}$$

$$I = \frac{6}{h^4} + \frac{2}{r_i^2 h^2} - \frac{8}{r_i^4 \gamma} + \frac{8}{r_i^2 \gamma h^2} + \frac{6}{r_i^4 \gamma}$$

(IV-10)

$$B = -\frac{4}{h^4} + \frac{2}{h^3 r_i} - \frac{1}{r_i^2 h^2} - \frac{1}{2hr_i^3} - \frac{2}{\gamma hr_i^3} - \frac{4}{r_i^2 \gamma h^2}$$

$$BB = \frac{1}{h} - \frac{1}{r_i h} \quad (IV-10)$$

$$L = \frac{4}{r_i \gamma} - \frac{4}{r_i h \gamma} - \frac{4}{r_i \gamma} = IR$$

$$LL = IR \cdot IR = \frac{1}{r_i \gamma}$$

$$AL = A \cdot IR = \frac{2}{r_i \gamma h} - \frac{1}{\gamma h r_i}$$

$$BL = B \cdot IR = \frac{2}{r_i \gamma h} + \frac{1}{\gamma h r_i}$$

$P_z^*(r, \theta)$  é o valor ponderado do carregamento fictício por unidade de área  $p_z^*(r, \theta)$ , dado pelas expressões (II-47) ou (II-48), segundo as hipóteses de distribuição linear e parabólica, respectivamente, da carga fictícia  $p_z^*(r, \theta)$  entre os pontos nodais da malha.

O raio do ponto da malha onde está sendo aplicada a "molécula" da fig. (IV-4), é designado nas expressões acima por  $r_i$ , sendo este ponto representado pelos dois retângulos concêntricos (ponto central da molécula).

O espaçamento da malha  $\Delta r$  no sentido radial é designado por  $h$ , enquanto no sentido circunferencial temos:  $\Delta \theta = \gamma$ .

De modo a tornar mais simples a utilização da "molé

cula" da fig. (IV-4), introduziremos as seguintes notações, tendo em vista a malha genérica de um setor de placa mostrado na fig. (IV-5).

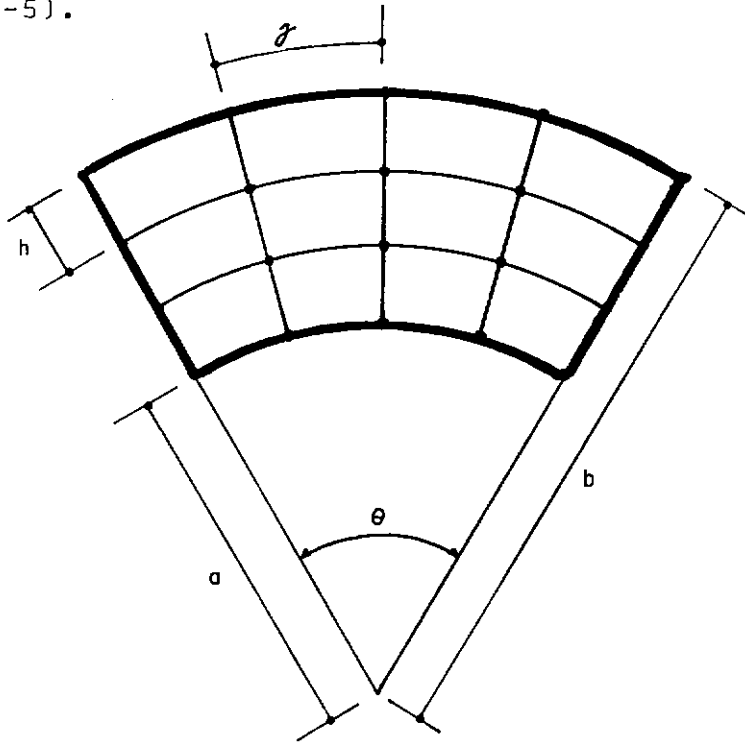


FIGURA IV-5 - Setor-de-Placa Circular

O raio externo  $b$  é considerado  $\lambda$  vezes maior que o raio interno  $a$ , sendo  $\lambda$  real positivo maior que a unidade. Adotaremos as seguintes notações:

$$R = b - a = (\lambda - 1)a \quad (IV-11a)$$

$$h = \Delta r = \frac{R}{N}, \quad N \geq 2 \text{ (inteiro)} \quad (IV-11b)$$

$N \rightarrow$  número de divisões iguais da placa no sentido radial

$$r_i = a + nh = \frac{Na + nR}{N}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (IV-11c)$$



Ao numerador da expressão (IV-11c) chamaremos  $\chi_i$ , e introduzindo (IV-11a), teremos:

$$\chi_i = [N + n(\lambda - 1)]a \quad (\text{IV-11d})$$

Dessa forma o valor de  $n$  define a posição do ponto central da "molécula" [fig. (IV-4)]. Para  $n$  nulo temos a "molécula" aplicada em pontos da malha situados sobre o bordo  $r = a$ , e para  $n = N$ , temos os pontos sobre o bordo  $r = b$ .

As expressões (IV-10) passam a ser escritas, como se segue:

$$AA = \gamma^4 \chi^3 (\chi + R) \quad (\text{IV-12a})$$

$$A = -4\gamma^4 \chi^4 - 2R\gamma^4 \chi^3 - R^2 \gamma^2 (\gamma^2 + 4)\chi^2 + R^3 \gamma^2 (2 + \gamma^2/2)\chi \quad (\text{IV-12b})$$

$$I = (6 - 8\gamma^2)R^2 + 2\gamma^4 (4 + \gamma^2)R^2 \chi^2 + 6\gamma^4 \chi^4 \quad (\text{IV-12c})$$

$$B = -4\gamma^4 \chi^4 + 2R\gamma^4 \chi^3 - R^2 \gamma^2 (\gamma^2 + 4)\chi^2 - R^3 \gamma^2 (2 + \gamma^2/2)\chi \quad (\text{IV-12d})$$

$$BB = \gamma^4 \chi^3 (\chi - R) \quad (\text{IV-12e})$$

$$L = IR = 4R^4 (\gamma^2 - 1) - 4R^2 \gamma^2 \chi^2 \quad (\text{IV-12f})$$

$$LL = IR IR = R^4 \quad (\text{IV-12g})$$

$$AL = A IR = R^2 \gamma^2 \chi^2 (2\chi - R) \quad (\text{IV-12h})$$

$$BL = B IR = R^2 \gamma^2 \chi^2 (2\chi + R) \quad (\text{IV-12i})$$

O segundo membro da expressão mostrada na fig. (IV-4) passa a ser:

$$["\text{MOLECULA}"] = \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{\overset{4}{X} \overset{4}{Y} \overset{4}{R}}{\overset{4}{N}} \right] \quad (\text{IV-13})$$

O valor de  $\chi$  nas expressões anteriores refere-se ao ponto central da molécula da fig. (IV-4).

Sobre a equação geral, composta pelas expressões (IV-12) e (IV-13), podemos observar que: definida uma malha, ou seja,  $R, N, \gamma, a, \lambda$  constantes, temos apenas como variável o valor de  $n$  (inteiro:  $0, 1, 2, 3, \dots$ ). Tornamos, assim, mais simples a aplicação da equação geral em diferenças finitas, possi**bi**litando maiores facilidades para possíveis programações.

Cumprе ressaltar que, para placas ou setores circulares onde temos o raio interno " $a$ " nulo surgirá assim uma singulariedade no ponto central da placa, onde  $r_1$  do mesmo será nulo. Para contornar o problema, e aproveitarmos as notações introduzidas anteriormente, procederemos da seguinte forma:

$$N = \frac{\text{Inteiro Impar} > 1}{2} \quad (\text{IV-14a})$$

$$n = n^* + \frac{1}{2}, \quad n^* = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{IV-14b})$$

$$R = b \quad (\text{IV-14c})$$

$$\chi = nR \quad (\text{IV-14d})$$

Desta forma evitaremos a singulariedade prevista, com

$$r_i = nh = n \frac{R}{N} = (n^* + \frac{1}{2}) (\frac{b}{N}) \quad (\text{IV-14e})$$

Um exemplo da aplicação deste artifício será dado na análise de placas circulares com aquecimento com simetria axial.

#### 4.5. Placas Circulares com Aquecimento com Simetria Axial

##### 4.5.1. Equações Básicas

Se o campo térmico atuante na placa circular apresentar simetria com relação a um eixo perpendicular a seu plano passando pelo seu centro, [eixo z da fig. (IV-1)], a superfície fletida também será simétrica em relação a este eixo. Todos os pontos equidistantes do centro da placa apresentarão as mesmas flechas, bastando apenas analisar as flechas numa seção diametral. Neste caso o campo térmico T é expresso por:

$$T = T(r, z) \quad (\text{IV-15})$$

As flechas w serão independentes de  $\theta$ . Assim o operador de Laplace [equação (IV-2)] se transforma em:

$$\nabla_r^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \quad (\text{IV-16})$$

Consequentemente a equação diferencial que rege a

flexão das placas circulares, terá a seguinte expressão:

$$D \nabla_r^2 \nabla_r^2 w = - \nabla_r^2 M_T = p_z^* (r) \quad (\text{IV-17})$$

Ou na forma desenvolvida:

$$D \left[ \frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} \right] = p_z^* (r) \quad (\text{IV-18})$$

O " momento fletor térmico equivalente"  $M_T$ , passa a ser definido por:

$$M_T = \frac{E \alpha_T}{1-\nu} \int_{-t/2}^{t/2} T(r, z) z dz \quad (\text{IV-19})$$

Como consequência da simetria radial da superfície fletida, os esforços internos, se escrevem:

$$M_r = - D \left[ \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right] - M_T \quad (\text{IV-20a})$$

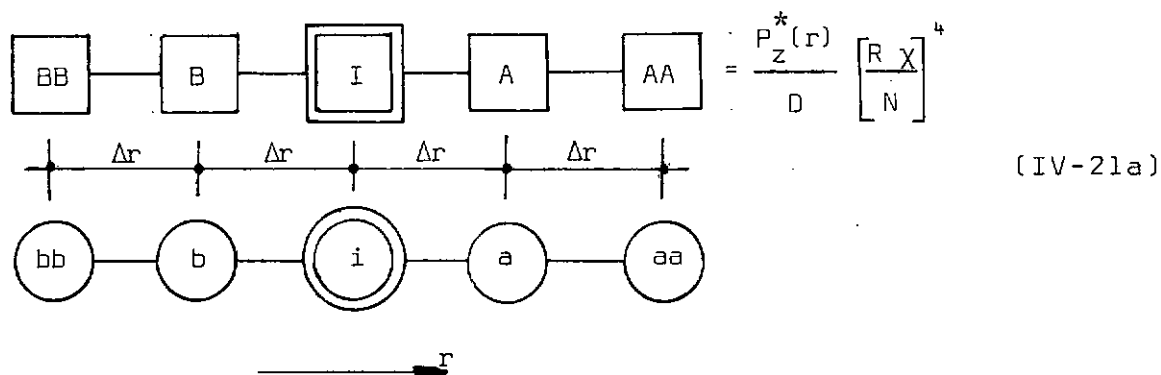
$$M_\theta = - D \left[ \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right] - M_T \quad (\text{IV-20b})$$

$$M_{r\theta} = M_{\theta r} = 0 \quad (\text{IV-20c})$$

$$Q_r = V_r = - D \left[ \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right] - \frac{dM_T}{dr} \quad (\text{IV-20d})$$

$$Q_\theta = V_\theta = 0 \quad (\text{IV-20e})$$

Usando diferenças finitas centrais juntamente com a nomenclatura introduzida no item 4.4., a equação (IV-18) se transforma em:



$$= \frac{P_z^*(r)}{D} \left[ \frac{R}{N} \chi \right]^4 \quad (IV-21a)$$

Onde:

$$AA = \chi^3 (\chi + R) \quad (IV-21b)$$

$$BB = \chi^3 (\chi - R) \quad (IV-21c)$$

$$I = 2\chi^2 (3\chi^2 + R^2) \quad (IV-21d)$$

$$A = -4\chi^4 - 2R\chi^3 - R^2\chi^2 + \chi R^3/2 \quad (IV-21e)$$

$$B = -4\chi^4 + 2R\chi^3 - R^2\chi^2 - \chi R^3/2 \quad (IV-21f)$$

No caso de aplicação da molécula da equação (IV-21a) em pontos singulares, ou seja, onde o raio do ponto central da placa é nulo, devemos adotar o mesmo procedimento do item 4.4.

Na equação (IV-21a),  $P_z^*(r)$  representa o valor ponderado da carga fictícia por unidade de área  $p_z^*(r) = -\nabla_r^2 M_T$ ,

relativa ao ponto central i. Se admitirmos uma variação linear da carga  $p_z^*(r)$  entre os pontos nodais, teremos o seguinte valor ponderado:

$$P_z^*(r) = \frac{1}{6} (p_a^* + 4p_i^* + p_b^*) \quad (\text{IV-22a})$$

Ou se admitirmos uma variação parabólica do segundo grau, teremos:

$$P_z^*(r) = \frac{1}{12} (p_a^* + 10p_i^* + p_b^*) \quad (\text{IV-22b})$$

#### 4.5.2. Condições de Contorno

##### 4.5.2.1. Bordo Engastado: $w = 0$ e $\frac{dw}{dr} = 0$

Em diferenças finitas centrais, segundo a fig. (IV-6), teremos:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{1}{2h} [w_{i+1} - w_{i-1}] = 0$$

$$\text{Assim: } w_i = 0 \text{ e } w_{i+1} = w_{i-1} \quad (\text{IV-23})$$

A todo ponto imediatamente vizinho ao bordo, corresponderá um outro virtual externo, de mesma flecha.

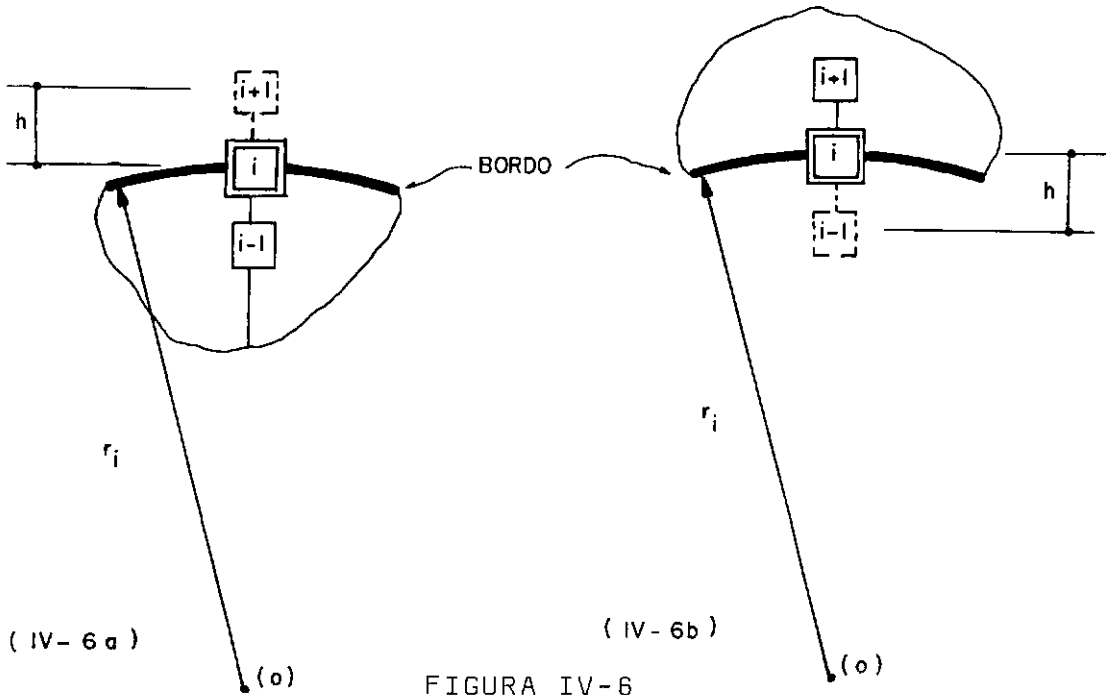


FIGURA IV-6

#### 4.5.2.2. Bordo Simplesmente Apoiado

Temos:  $w = 0$  e  $M_r = 0$

Escrevendo a equação (IV-20a) em diferenças finitas, e tendo em vista a fig. (IV-6a), teremos:

$$w_{i+1} = - \left[ \frac{2\chi_i - \nu R}{2\chi_i + \nu R} \right] w_{i-1} - \frac{2\chi_i R^2}{N^2 (2\chi_i + \nu R)} \frac{M_T^i}{D}; \quad w_i = 0 \quad (\text{IV-24a})$$

Tendo em vista a fig. (IV-6b), teremos:

$$w_{i-1} = - \left[ \frac{2\chi_i + \nu R}{2\chi_i - \nu R} \right] w_{i+1} - \frac{2\chi_i R^2}{N^2 (2\chi_i - \nu R)} \frac{M_T^i}{D}; \quad w_i = 0 \quad (\text{IV-24b})$$

Nas expressões (IV-24a,b) o valor  $\chi_i$  refere-se ao ponto nodal situado sobre o bordo da placa. Quando da aplicação da "molécula" da equação (IV-21a), verificamos que o valor

de  $\chi$  envolvido, refere-se ao ponto imediatamente vizinho ao bordo. Assim, surge a necessidade da compatibilização dos valores de  $\chi$ , envolvidos nas expressões (IV-24a,b) e (IV-21a). No caso da fig. (IV-6a), temos:  $\chi_i = \chi_{i-1} + R$ . No caso da fig. (IV-6b) teremos:  $\chi_i = \chi_{i+1} - R$ .

#### 4.5.2.3. Bordo Livre.

$$\text{Temos: } M_r = 0; V_r = Q_r = 0$$

Segundo as fig. (IV-7a) e (IV-7b) a primeira condição nos conduz, respectivamente a:

$$w_{i+1} = \frac{4\chi_i}{2\chi_i + \nu R} w_i - \left( \frac{2\chi_i - \nu R}{2\chi_i + \nu R} \right) w_{i-1} - \frac{2\chi_i R^2}{N^2 (2\chi_i + \nu R)} \frac{M_T^i}{D} \quad (\text{IV-25a})$$

$$w_{i-1} = \frac{4\chi_i}{2\chi_i - \nu R} w_i - \left( \frac{2\chi_i + \nu R}{2\chi_i - \nu R} \right) w_{i+1} - \frac{2\chi_i R^2}{N^2 (2\chi_i - \nu R)} \frac{M_T^i}{D} \quad (\text{IV-25b})$$

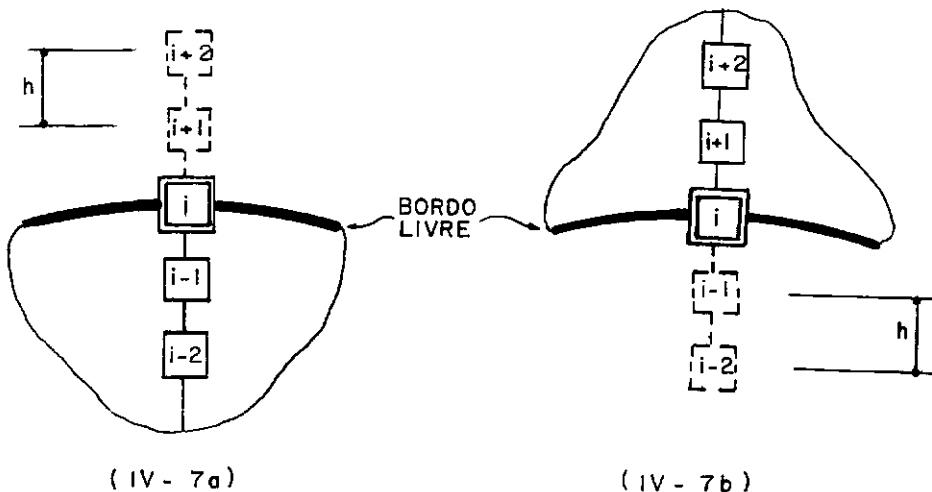


FIGURA IV-7



A segunda condição de contorno devidamente escrita em diferenças finitas, através da utilização das expressões (II-46) na equação (IV-20d), nos fornece, em relação às fig. (IV-7a e b), respectivamente:

$$w_{i+2} = w_{i-2} - \left[ 2 + 2\beta + \beta^2 + (2 - 2\beta + \beta^2) \left( \frac{2 - \beta\nu}{2 + \beta\nu} \right) \right] w_{i-1} - \frac{2R^3}{N D} \left( \frac{dM_T}{dr} \right)^i +$$

$$+ \left[ 4\beta + (2 - 2\beta + \beta^2) \frac{4}{2 + \beta\nu} \right] w_i + \left[ \frac{2R^2 (2\beta - 2 - \beta^2)}{N (2 + \beta\nu)} \right] \frac{M_T^i}{D} \quad (\text{IV-25c})$$

$$w_{i-2} = w_{i+2} - \left[ 2 - 2\beta + \beta^2 + (2 + 2\beta + \beta^2) \left( \frac{2 + \nu\beta}{2 - \nu\beta} \right) \right] w_{i+1} + \frac{2R^3}{N D} \left( \frac{dM_T}{dr} \right)^i +$$

$$- \left[ 4\beta - (2 + 2\beta + \beta^2) \left( \frac{4}{2 - \nu\beta} \right) \right] w_i - \left[ \frac{2R^2 (2 + 2\beta + \beta^2)}{N (2 - \nu\beta)} \right] \frac{M_T^i}{D} \quad (\text{IV-25d})$$

Onde nas expressões anteriores:  $\beta = R/\chi_1$

#### 4.5.3. Obtenção dos esforços

Uma vez obtidas as flechas nos diversos pontos da malha, com raciocínio análogo do item 2.6., passaremos à determinação dos esforços. Para isto basta utilizarmos as expressões que se seguem:

$$(M_r)_i \approx - \frac{DN^2}{2\chi_1 R} \left[ \boxed{2\chi_1 + \nu R} \cdot \boxed{-4\chi_1} \cdot \boxed{2\chi_1 - \nu R} \right] \{w\} - M_T^i \quad (\text{IV-26a})$$

$$(M_\theta)_i \approx - \frac{DN^2}{2\chi_1 R} \left[ \boxed{2\nu\chi_1 - R} \cdot \boxed{-4\nu\chi_1} \cdot \boxed{2\nu\chi_1 + R} \right] \{w\} - M_T^i \quad (\text{IV-26b})$$

$$\begin{aligned}
 (V_r = Q_r)_i &= - \frac{DN^3}{2X_i R^3} \left[ \begin{array}{c} \boxed{-X_i^2} \rightarrow \boxed{2X_i^2 + 2X_i R + R^2} \rightarrow \boxed{-4X_i R} \rightarrow \boxed{-2X_i^2 + 2X_i R + R^2} \rightarrow \boxed{X_i^2} \end{array} \right] \{w\} \\
 - \left( \frac{dM_T}{dr} \right)_i & \quad (IV-26d)
 \end{aligned}$$

Nas equações (IV-26) os dois retângulos concêntricos referem-se ao ponto nodal da malha, genericamente denominado "i", onde se deseja calcular os esforços internos.

De posse da equação geral, composta pelas expressões (IV-21) e (IV-22), juntamente com as condições de contorno [ítem 4.5.2.] e com as expressões dos esforços internos [equações (IV-26)], temos a análise completa das placas circulares sob efeito de um campo térmico axissimétrico.

#### 4.6. Aplicações do Caso Geral

Retomaremos neste ítem o estudo da flexão geral das placas circulares, onde a notação usada será baseada na fig. (IV-8).

A grande dificuldade da aplicação da equação geral, esquematizada na figura (IV-4), surge quando o ponto central da "molécula" situa-se sobre o contorno ou na vizinhança do mesmo. Com o objetivo de facilitar estas aplicações, expressaremos a flecha dos pontos virtuais externos em função da flecha dos internos, através do uso das condições de contorno.

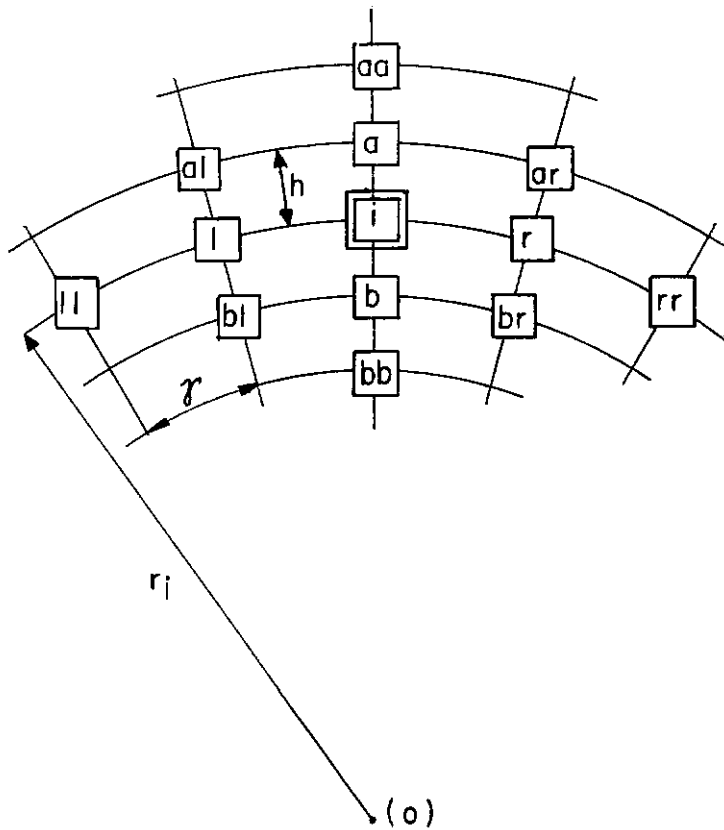


FIGURA IV-8 - Malha genérica para placa circular

Simplificações na formulação a ser apresentada a seguir são obtidas com as seguintes notações:

$$\varnothing = \frac{\chi}{R} \quad (\text{IV-27a})$$

$$\beta = \frac{R}{\chi} = \frac{1}{\varnothing} \quad (\text{IV-27b})$$

$$\psi = \varnothing + 1 \quad (\text{IV-27c})$$

$$\eta = \varnothing - 1 \quad (\text{IV-27d})$$

$$\xi = 2 + \nu\beta \quad (\text{IV-27e})$$

$$\zeta = 2 - \nu\beta \quad (\text{IV-27f})$$

Todas as grandezas auxiliares das expressões (IV-27) referem-se ao ponto central da "molécula" da fig. (IV-8).

#### 4.6.1. Bordo Engastado

$$\text{Temos: } w = 0 \text{ e } \frac{\partial w}{\partial n} = 0$$

Segundo a fig. (IV-9), observamos que:

$$\text{a) para um bordo } \theta = \text{Cte, temos: } w = 0 \text{ e } \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{IV-28a})$$

$$\text{b) para um bordo } r = \text{Cte, temos: } w = 0 \text{ e } \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (\text{IV-28b})$$

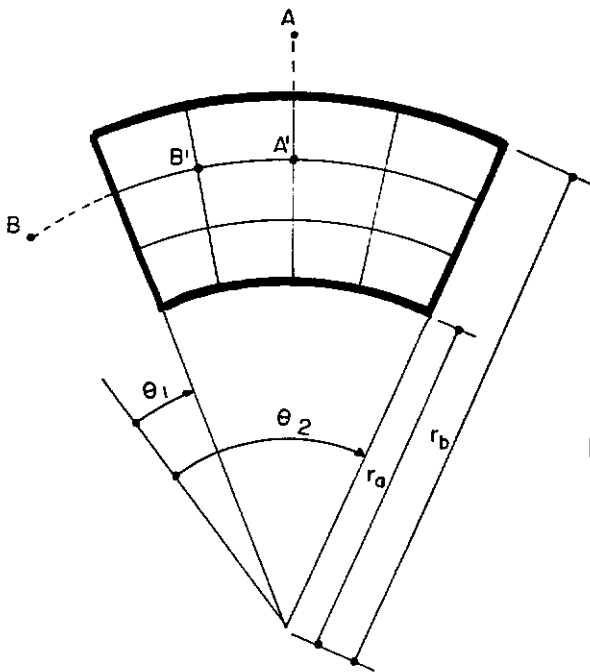
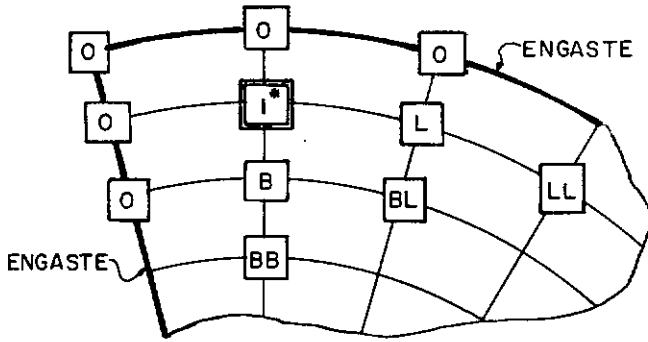


FIGURA IV-9 - Placa em forma de Setor Circular

A substituição das equações (IV-28) por suas correspondentes formas aproximadas em diferenças finitas centrais, nos leva à seguinte conclusão: "a todo ponto imediatamente vizinho ao bordo engastado corresponderá, um outro virtual externo de mesma flecha".

$$w_A = w_A', \quad e \quad w_B = w_B', \quad (IV-29)$$

Tendo em vista as expressões (IV-12) e (IV-13) podemos escrever:



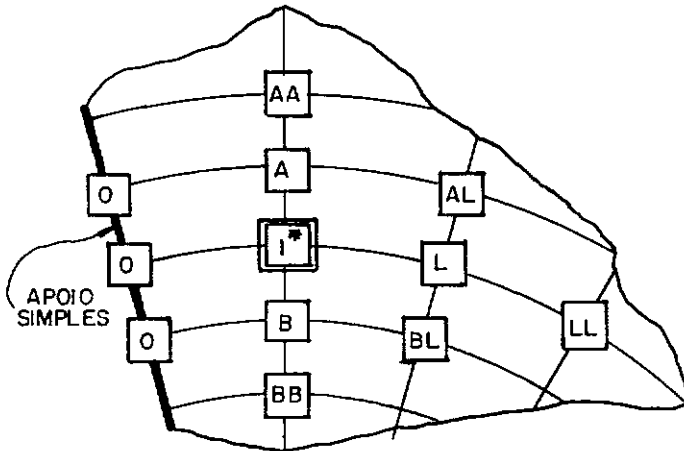
$$I^* = I + AA + LL$$

$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X \ Y \ R}{N} \right]^4$$

FIGURA IV-10 - Bordo Engastado

#### 4.6.2. Bordo Simplesmente Apoiado

Escrevendo a condição (IV-6b) em diferenças finitas centrais, chegamos a:



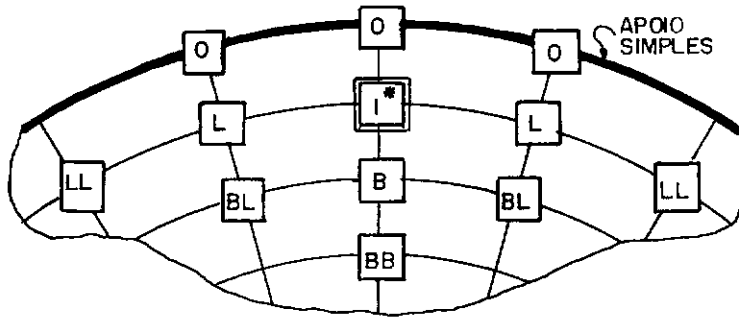
$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X \ Y \ R}{N} \right]^4 + \frac{LLX^2 Y^2 M_I^L}{N^2 D}$$

$$I^* = I - LL$$

FIGURA IV-11 - Bordo Simplesmente Apoiado

Com procedimento análogo em relação a condição

(IV-6c):

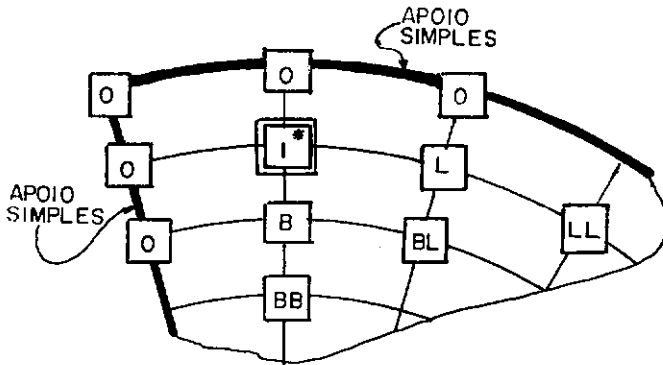


$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X Y R}{N} \right]^4 +$$

$$+ AA \frac{2R^2 \psi}{(2\psi + \nu)N^2} \frac{M_T^a}{D}$$

$$I^* = I - AA \frac{2\psi - \nu}{2\psi + \nu}$$

FIGURA IV-12 - Bordo Simplesmente Apoiado



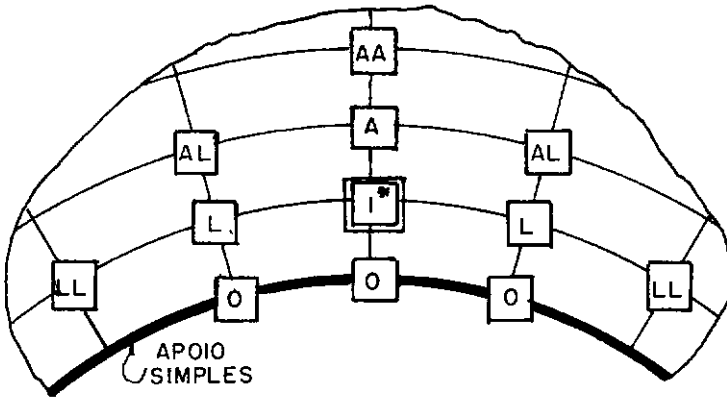
$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X Y R}{N} \right]^4 +$$

$$+ AA \frac{2R^2 \psi}{(2\psi + \nu)N^2} \frac{M_T^a}{D} +$$

$$+ \frac{LL X Y}{N^2} \frac{M_T^l}{D}$$

$$I^* = I - AA \frac{2\psi - \nu}{2\psi + \nu} - LL$$

FIGURA IV-13 - Bordo Simplesmente Apoiado

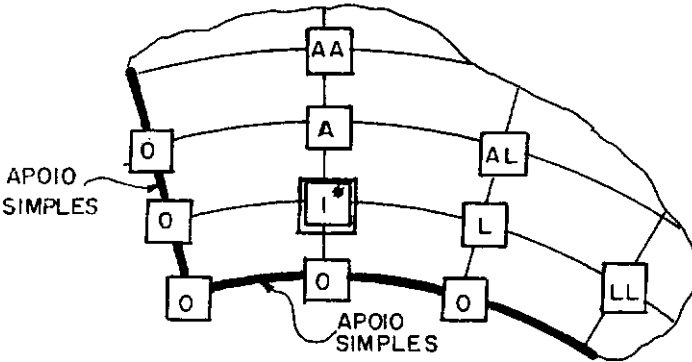


$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X Y R}{N} \right]^4 +$$

$$+ BB \frac{2R^2 \eta}{N^2 (2\eta - \nu)} \frac{M_T^b}{D}$$

$$I^* = I - BB \frac{2\eta + \nu}{2\eta - \nu}$$

FIGURA IV-14 - Bordo Simplesmente Apoiado



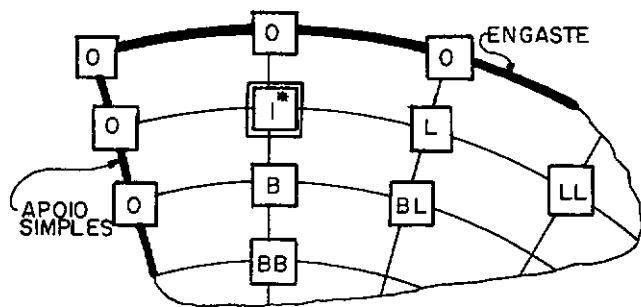
$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X Y R}{N} \right]^4 +$$

$$+ BB \frac{2R^2 \eta}{(2\eta - \nu)N^2} \frac{M_T^b}{D} +$$

$$+ LL \frac{X^2 Y^2}{N^2} \frac{M_T^b}{D}$$

$$I^* = I - BB \frac{2\eta + \nu}{2\eta - \nu} - LL$$

FIGURA IV-15 - Bordo Simplesmente Apoiado

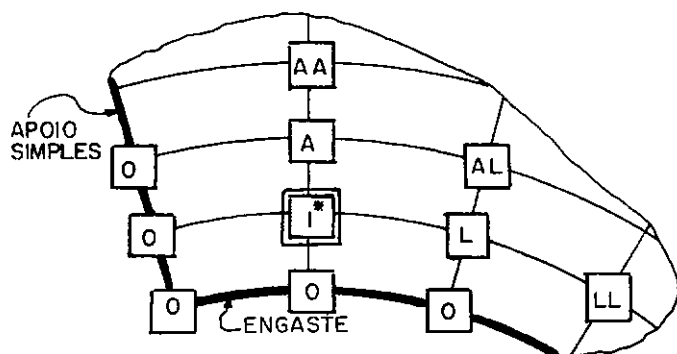


$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X Y R}{N} \right]^4 +$$

$$+ LL \frac{X^2 Y^2}{N^2} \frac{M_T^L}{D}$$

$$I^* = I + AA - LL$$

FIGURA IV-18 - Bordo Engastado e Simplesmente Apoiado



$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X Y R}{N} \right]^4 +$$

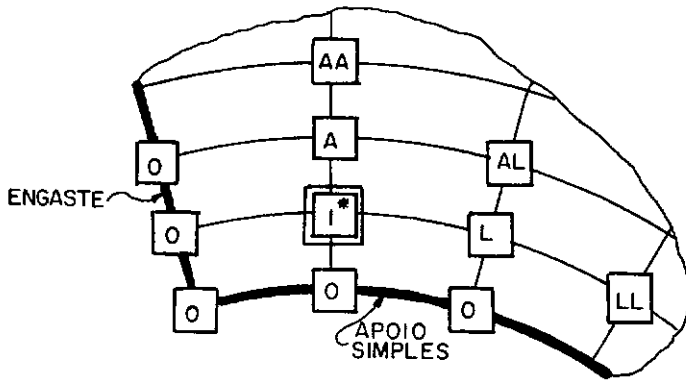
$$+ LL \frac{X^2 Y^2}{N^2} \frac{M_T^L}{D}$$

$$I^* = I + BB - LL$$

FIGURA IV-19 - Bordo Engastado e Simplesmente Apoiado



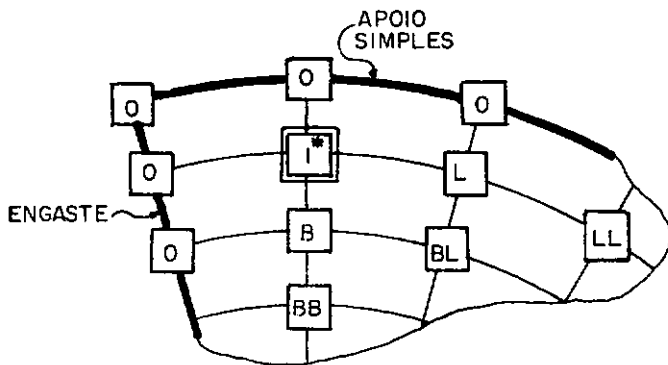
### 4.6.3. Bordo Engastado e Bordo Simplesmente Apoiado



$$= BB \frac{2R^2 \eta}{(2\eta - \nu)N^2} \frac{M_T^b}{D} + \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X \ Y \ R}{N} \right]^4$$

$$I^* = I - BB \frac{2\eta + \nu}{2\eta - \nu} + LL$$

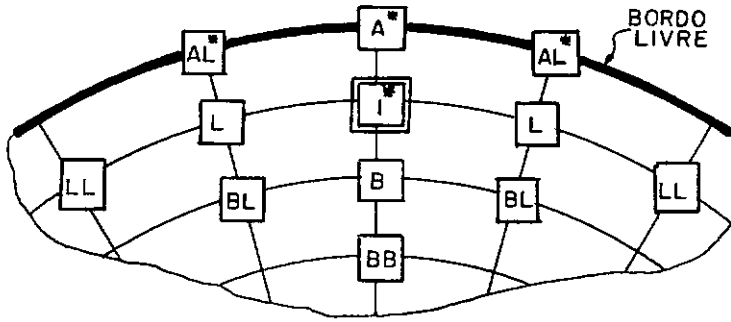
FIGURA IV-16 - Bordo Engastado e Simplesmente Apoiado



$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X \ Y \ R}{N} \right]^4 + AA \frac{2R^2 \psi}{(2\psi + \nu)N^2} \frac{M_T^a}{D}$$

$$I^* = I - AA \frac{2\psi - \nu}{2\psi + \nu} + LL$$

FIGURA IV-17 - Bordo Engastado e Simplesmente Apoiado

4.6.4. Bordo Livre

$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X \gamma R}{N} \right]^4 +$$

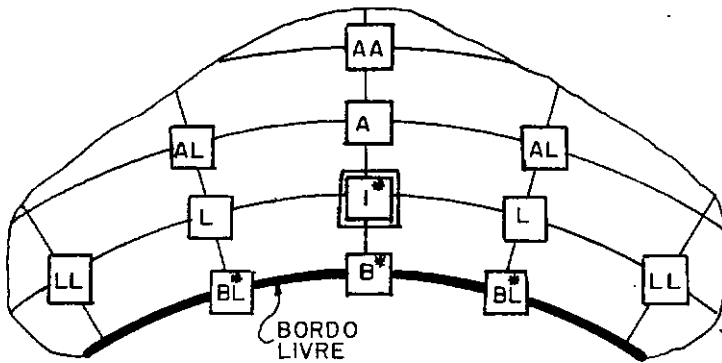
$$+ AA \frac{2\psi R^2}{(2\psi + \nu)N^2} \frac{M_T^a}{D}$$

$$I^* = I - AA \frac{2\psi - \nu}{2\psi + \nu}$$

$$A^* = A + AA \frac{4(\psi^2 \gamma^2 + \nu)}{2\gamma \psi (2\psi + \nu)}$$

$$AL^* = AL - AA \frac{2\nu}{2\gamma \psi (2\psi + \nu)}$$

FIGURA IV-20 - Bordo Livre



$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X \gamma R}{N} \right]^4 +$$

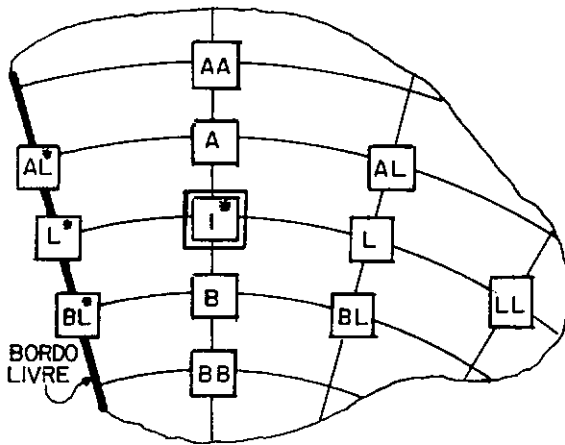
$$+ BB \frac{2R^2 \eta}{N^2 (2\eta - \nu)} \frac{M_T^b}{D}$$

$$I^* = I - BB \frac{2\eta + \nu}{2\eta - \nu}$$

$$B^* = B + BB \frac{4(\eta^2 \gamma^2 + \nu)}{2\gamma \eta (2\eta - \nu)}$$

$$BL^* = BL - BB \frac{2\nu}{2\gamma \eta (2\eta - \nu)}$$

FIGURA IV-21 - Bordo Livre



$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X Y R}{N} \right]^4 +$$

$$+ LL \frac{X^2 Y^2}{N^2} \frac{M_T^L}{D}$$

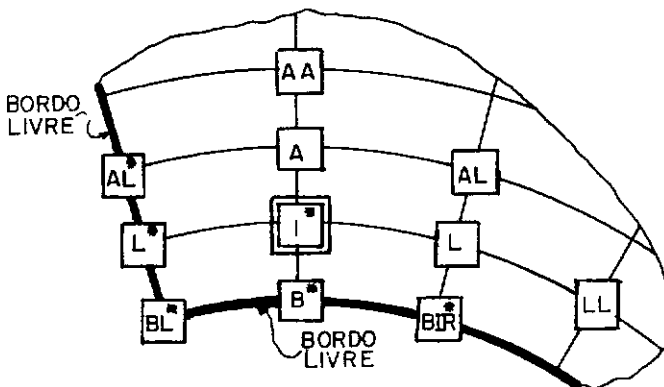
$$I^* = I - LL$$

$$BL^* = BL + LL \frac{\gamma^2 \delta^2 (1-2\nu\delta)}{2}$$

$$AL^* = AL - LL \frac{\gamma^2 \delta^2 (1+2\nu\delta)}{2}$$

$$L^* = L + LL \frac{2(1+\nu\gamma \delta^2)}{\gamma^2 \delta^2}$$

FIGURA IV-22 - Bordo Livre



$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X Y R}{N} \right]^4 +$$

$$+ LL \frac{X^2 Y^2}{N^2} \frac{M_T^L}{D} +$$

$$+ BB \frac{2R^2 \eta}{N^2 (2\eta - \nu)} \frac{M_T^b}{D}$$

$$I^* = I - LL - BB \frac{2\eta + \nu}{2\eta - \nu}$$

$$B^* = B + BB \frac{4(\eta \gamma^2 + \nu)}{\gamma^2 \eta (2\eta - \nu)}$$

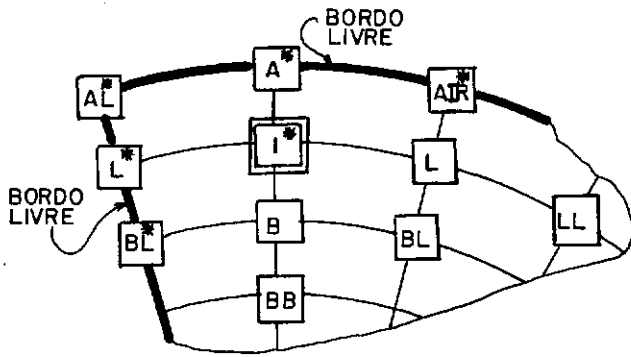
$$L^* = L + LL \frac{2(1+\nu\gamma \delta^2)}{\gamma^2 \delta^2}$$

$$AL^* = AL - LL \frac{\gamma^2 \delta^2 (1+2\nu\delta)}{2}$$

$$BL^* = BL - BB \frac{2\nu}{\gamma^2 \eta (2\eta - \nu)}$$

$$BL^* = BL + LL \frac{\gamma^2 \delta^2 (1-2\nu\delta)}{2} - BB \frac{2\nu}{\gamma^2 \eta (2\eta - \nu)}$$

FIGURA IV-23 - Bordo Livre



$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X Y R}{N} \right]^4 +$$

$$+ LL \frac{X^2 Y^2}{N^2} \frac{M_T^2}{D} +$$

$$+ AA \frac{2R^2 \psi}{N (2\psi + \nu)} \frac{M_T^2}{D}$$

$$I^* = I - LL - AA \frac{2\psi - \nu}{2\psi + \nu}$$

$$L^* = L + LL \frac{2(1 + \nu \gamma)}{2(1 + \nu \gamma)}$$

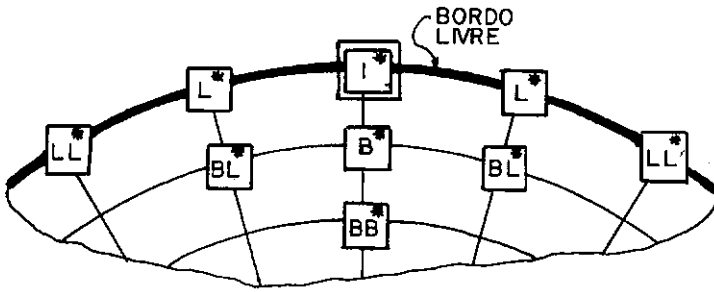
$$A^* = A + AA \frac{4(\psi \gamma + \nu)}{\gamma \psi (2\psi + \nu)}$$

$$BL^* = BL + LL \frac{\gamma^2}{\gamma^2} \frac{(1 - 2\gamma)}{2}$$

$$ALR^* = AL - AA \frac{2\nu}{\gamma \psi (2\psi + \nu)}$$

$$AL^* = AL - LL \frac{\gamma^2}{\gamma^2} \frac{(1 + 2\nu \gamma)}{2} - AA \frac{2\nu}{\gamma \psi (2\psi + \nu)}$$

FIGURA IV-24 - Bordo Livre



$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X \cdot Y \cdot R}{N} \right]^4 +$$

$$+ AA \frac{2R^3}{N D} \left( \frac{\partial M_T}{\partial r} \right)^i +$$

$$+ \left[ AL - AA \frac{\beta^2 (2-\nu)}{\gamma^2} \right] \frac{2R}{N \xi D} (M_T^l + M_T^r) + \left\{ A + AA \left[ 2 - 2\beta + \beta^2 + \frac{2\beta^2 (2-\nu)}{\gamma^2} \right] \right\} \times \frac{2R^2}{N \xi D} M_T^i$$

$$I^* = I + A \frac{4(\gamma^2 + \nu\beta^2)}{\gamma^2 \xi} - AL \frac{4\nu\beta^2}{\gamma^2 \xi} + AA \left[ 4\beta + \frac{4(2-2\beta + \beta^2)}{\xi} + \right.$$

$$\left. + \frac{8\beta^2 \gamma^2 (2-3\beta) + 12\beta^4 \nu(2-\nu) - 4\gamma^2 \beta^4 \nu(2-\nu)}{\gamma^4 \xi} \right]$$

$$BB^* = AA + BB$$

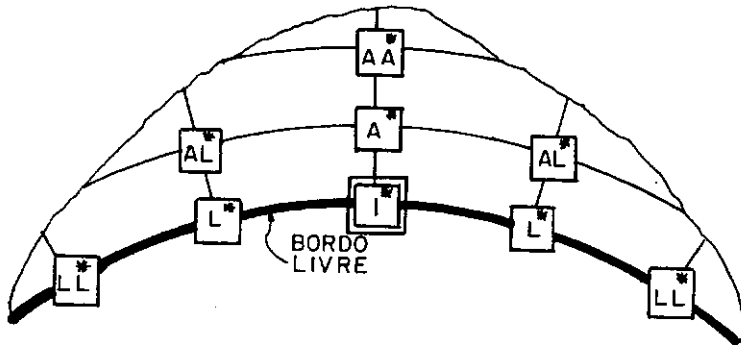
$$BL^* = BL + AA \frac{4(2-\nu)\beta^2}{\gamma^2 \xi} - AL \frac{\xi}{\xi}$$

$$LL^* = LL - AL \frac{2\nu\beta^2}{\gamma^2 \xi} + AA \frac{2\nu(2-\nu)\beta^4}{\gamma^4 \xi}$$

$$L^* = L - A \frac{2\nu\beta^2}{\gamma^2 \xi} + AL \frac{4(\gamma^2 + \nu\beta^2)}{\gamma^2 \xi} - AA \left[ \frac{4\beta^2 \gamma^2 (2-3\beta) + 8\beta^4 \nu(2-\nu) - 2\gamma^2 \beta^4 \nu(2-\nu)}{\gamma^4 \xi} \right]$$

$$B^* = B - A \frac{\xi}{\xi} - AA \left[ 2 + 2\beta + \beta^2 + \frac{8(2-\nu)\beta^2}{\gamma^2 \xi} + (2-2\beta + \beta^2) \frac{\xi}{\xi} \right]$$

FIGURA IV-25 - Bordo Livre



$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X Y R}{N} \right]^4 -$$

$$= BB \frac{2R^3}{N D} \left( \frac{\partial M_T}{\partial r} \right)^i +$$

$$+ \left[ BL - BB \frac{\beta^2 (2-\nu)}{\gamma} \right] \frac{2R^2}{N \zeta D} (M_T^L + M_T^R) + \left\{ B + BB \left[ 2 + 2\beta + \beta^2 + \frac{2\beta^2 (2-\nu)}{\gamma} \right] \right\} \times$$

$$\times \frac{2R^2}{N \zeta D} M_T^i$$

$$I^* = I + B \frac{4(\gamma + \nu\beta^2)}{\gamma \zeta} - BL \frac{4\nu\beta^2}{\gamma \zeta} + BB \left[ -4\beta + \frac{4(2+2\beta+\beta^2)}{\zeta} + \right.$$

$$\left. + \frac{8\beta^2 \gamma (2+3\beta) + 12\beta^4 \nu(2-\nu) - 4\gamma^2 \beta^4 \nu(2-\nu)}{\gamma^4 \zeta} \right]$$

$$AA^* = AA + BB$$

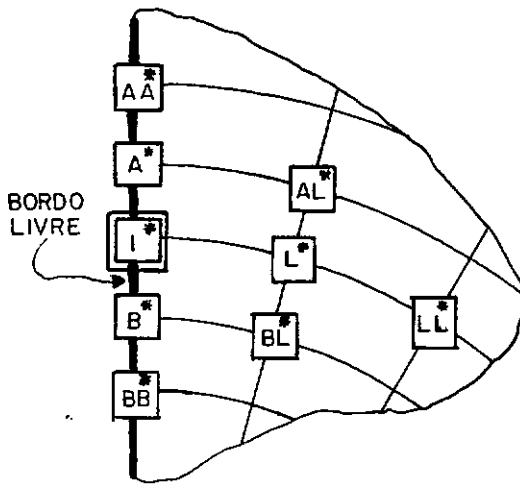
$$AL^* = AL + BB \frac{4(2-\nu)\beta^2}{\gamma \zeta} - BL \frac{\xi}{\zeta}$$

$$LL^* = LL - BL \frac{2\nu\beta^2}{\gamma \zeta} + BB \frac{2\nu(2-\nu)\beta^4}{\gamma^4 \zeta}$$

$$L^* = L - B \frac{2\nu\beta^2}{\gamma \zeta} + BL \frac{4(\gamma + \nu\beta^2)}{\gamma \zeta} - BB \left[ \frac{4\beta^2 \gamma (2+3\beta) + 8\beta^4 \nu(2-\nu) - 2\gamma^2 \beta^4 \nu(2-\nu)}{\gamma^4 \zeta} \right]$$

$$A^* = A - B \frac{\xi}{\zeta} - BB \left[ 2 - 2\beta + \beta^2 + \frac{8(2-\nu)\beta^2}{\gamma \zeta} + (2+2\beta+\beta^2) \frac{\xi}{\zeta} \right]$$

FIGURA IV-26 - Bordo Livre



$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X Y R}{N} \right]^4 +$$

$$+ LL \frac{2 \gamma X}{N^2 D} \left( \frac{\partial M_T}{\partial \theta} \right)^i +$$

$$+ \left\{ AL - LL \gamma^2 \left[ \frac{(2\nu-1)\varnothing}{2} + (2-\nu)\varnothing^2 \right] \right\} \frac{R^2 \gamma \psi}{N D} M_T^a +$$

$$+ \left\{ BL + LL \gamma^2 \left[ \frac{(2\nu-1)\varnothing}{2} - (2-\nu)\varnothing^2 \right] \right\} \frac{R^2 \gamma \eta}{N D} M_T^b +$$

$$+ \left\{ L + LL \left[ 2 - 2(1-\nu) \gamma^2 + 2(2-\nu) \gamma^2 \varnothing^2 \right] \right\} \frac{X Y}{N D} M_T^i$$

$$AA^* = AA - AL \gamma^2 \psi \left[ 1+2\nu\psi \right] / 2 + LL \gamma^4 \left[ (\nu^2 - 1/4)\varnothing + (\nu^2 + \nu + 3/4)\varnothing^2 + \right.$$

$$\left. - (\nu^2 - 3\nu - 1)\varnothing^3 + \nu(2-\nu)\varnothing^4 \right]$$

$$A^* = A - L \gamma^2 \varnothing (1+2\nu\varnothing) / 2 + AL 2 \left[ 1+\nu\gamma^2 \psi^2 \right] + LL \gamma^4 \left[ (1-2\nu^2)\varnothing - 4\nu^2 \varnothing^2 + \right.$$

$$\left. + 2(\nu^2 - 3\nu - 1)\varnothing^3 - 4\nu(2-\nu)\varnothing^4 \right] - LL 2\gamma^2 \left[ \nu\varnothing + 2\varnothing^2 \right]$$

$$B^* = B + L \gamma^2 \varnothing (1-2\nu\varnothing) / 2 + BL 2 \left[ 1+\nu\gamma^2 \eta^2 \right] + LL \gamma^4 \left[ -(1-2\nu^2)\varnothing - 4\nu^2 \varnothing^2 + \right.$$

$$\left. - 2(\nu^2 - 3\nu - 1)\varnothing^3 - 4\nu(2-\nu)\varnothing^4 \right] - LL 2\gamma^2 \left[ \nu\varnothing + 2\varnothing^2 \right]$$

continua...

$$\begin{aligned}
I^* = & I + L^2(1+v\gamma^2\theta^2) + AL\gamma^2\psi \left[1-2v\psi\right]/2 - BL\gamma^2\eta \left[1+2v\eta\right]/2 + \\
& + LL \left\{ \gamma^4 \left[ v(1/4-v)\theta + (7v^2-11v/4-6/4)\theta^2 + v(v/2-1)\theta^3 + 6v(2-v)\theta^4 \right] + \right. \\
& \left. + \gamma^2 \left[ 4(v-1) + 8\theta^2 \right] + 4 \right\}
\end{aligned}$$

$$LL^* = 2 LL$$

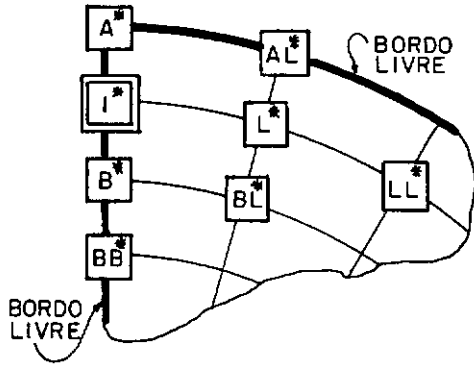
$$L^* = -LL^2 \left[ 2 - 2(1-v)\gamma^2 + 2(2-v)\gamma^2\theta^2 \right]$$

$$AL^* = LL\gamma^2 \left[ (2v-1)\theta + 2(2-v)\theta^2 \right]$$

$$BL^* = LL\gamma^2 \left[ -(2v-1)\theta + 2(2-v)\theta^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
BB^* = & BB + BL\gamma^2\eta \left[1-2v\eta\right]/2 + LL\gamma^4 \left[ -(v^2-1/4)\theta + (v^2+v+3/4)\theta^2 + \right. \\
& \left. + (v^2-3v-1)\theta^3 + v(2-v)\theta^4 \right]
\end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
 &= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X Y R}{N} \right]^4 + LL \frac{2Y X^3}{N^2 D} \left( \frac{\partial M_T}{\partial \theta} \right)^1 + \\
 &+ \left\{ BL + LL \gamma^2 \left[ \frac{(2\nu-1)\varnothing}{2} - (2-\nu)\varnothing^2 \right] \right\} \frac{R^2 Y \eta^2}{N^2 D} M_T^b + \\
 &+ \left\{ L + LL \left[ 2 - 2(1-\nu)\gamma^2 + 2(2-\nu)\gamma^2 \varnothing^2 \right] \right\} \frac{X Y}{N^2 D} M_T^1 + \\
 &+ \left\{ AA - AL \gamma^2 \psi(1-2\psi)/2 + LL \left[ \frac{(2\nu-1)\varnothing}{2} + (2-\nu)\varnothing^2 \right] \gamma^4 \psi(1-2\psi)/2 \right\} \frac{R^2}{N^2 (1+\nu)D} M_T^a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 BB^* &= BB + BL \gamma^2 \eta(1-2\nu\eta)/2 + LL \gamma^4 \left[ -(\nu^2 - 1/4)\varnothing + (\nu^2 + \nu + 3/4)\varnothing^2 + (\nu^2 - 3\nu - 1)\varnothing^3 + \right. \\
 &\quad \left. + \nu(2-\nu)\varnothing^4 \right]
 \end{aligned}$$

$$BL^* = - LL \gamma^2 \left[ (2\nu-1)\varnothing - 2(2-\nu)\varnothing^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
 B^* &= B + BL \left[ 2(1+\nu\gamma^2 \eta^2) + L \gamma^2 \varnothing(1-2\nu\varnothing)/2 + LL \left\{ \gamma^4 \left[ -(1-2\nu^2)\varnothing - 4\nu\varnothing^2 + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2(\nu^2 - 3\nu - 1)\varnothing^3 - 4\nu(2-\nu)\varnothing^4 \right] + 2\gamma^2 \left[ \nu\varnothing - 2\varnothing^2 \right] \right\} \right]
 \end{aligned}$$

$$L^* = -2 LL \left[ 2 - 2(1-\nu)\gamma^2 + 2(2-\nu)\gamma^2 \varnothing^2 \right]$$

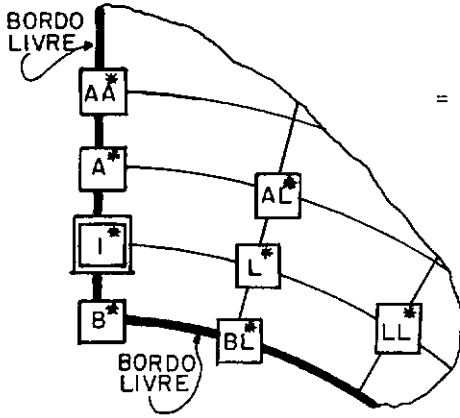
$$LL^* = 2 LL$$

$$I^* = I - AA + L^2(1+v\gamma^2\varnothing^2) - BL\gamma^2\eta(1+2v\eta)/2 + AL\gamma^2\psi + LL\left\{\gamma^4\left[-(v^2-1/4)\varnothing^2 + (5v^2-3v-9/4)\varnothing^2 + (v^2-3v-1)\varnothing^3 + 5v(2-v)\varnothing^4\right] + \gamma^2\left[4(v-1)+8\varnothing^2\right] + 4\right\}$$

$$A^* = A + 2AA - L\gamma^2\varnothing(1+2v\varnothing)/2 + AL(2-\gamma^2\psi) + LL\left\{\gamma^4\left[\varnothing/2 - (2v^2-2v-3/2)\varnothing^2 + -2v(2-v)\varnothing^4\right] - \gamma^2(2v\varnothing+4\varnothing^2)\right\}$$

$$AL^* = LL\gamma^2\left[(2v-1)\varnothing+2(2-v)\varnothing^2\right]$$

FIGURA IV-28 - Bordo Livre



$$\begin{aligned}
 &= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X}{N} \frac{Y}{R} \right]^4 + LL \frac{2Y^3 X^2}{N^2 D} \left( \frac{\partial M_T}{\partial \theta} \right)^i + \\
 &+ \left\{ AL - LL \gamma^2 \left[ \frac{(2\nu-1)\varnothing^2}{2} + (2-\nu)\varnothing^2 \right] \right\} \frac{R^2 Y^2 \psi}{N^2 D} M_T^a + \\
 &+ \left\{ L + LL \left[ 2 - 2(1-\nu)\gamma^2 + 2(2-\nu)\gamma^2 \varnothing^2 \right] \right\} \frac{X^2 Y^2}{N^2 D} M_T^i + \\
 &+ \left\{ BB + BL \gamma^2 \eta(1+2\eta)/2 + LL \left[ \frac{(2\nu-1)\varnothing^2}{2} - (2-\nu)\varnothing^2 \right] \gamma^2 \eta(1+2\eta)/2 \right\} \frac{R^2}{N^2 (1+\nu)D} M_T^b
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 AA^* &= AA - AL \gamma^2 \psi(1+2\nu\psi)/2 + LL \gamma^4 \left[ (\nu^2 - 1/4)\varnothing^2 + (\nu^2 + \nu + 3/4)\varnothing^2 - (\nu^2 - 3\nu - 1)\varnothing^3 + \right. \\
 &\quad \left. + \nu(2-\nu)\varnothing^4 \right]
 \end{aligned}$$

$$AL^* = LL \gamma^2 \left[ (2\nu-1)\varnothing^2 + 2(2-\nu)\varnothing^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
 A^* &= A + AL 2(1+\nu \gamma^2 \psi^2) - L \gamma^2 \varnothing(1+2\nu\varnothing)/2 + LL \left\{ \gamma^4 \left[ (1-2\nu^2)\varnothing - 4\nu^2 \varnothing^2 + 2(\nu^2 - 3\nu - 1)\varnothing^3 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 4\nu(2-\nu)\varnothing^4 \right] - 2\gamma^2 \left[ \nu\varnothing + 2\varnothing^2 \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$L^* = -2 LL \left[ 2 - 2(1-\nu)\gamma^2 + 2(2-\nu)\gamma^2 \varnothing^2 \right]$$

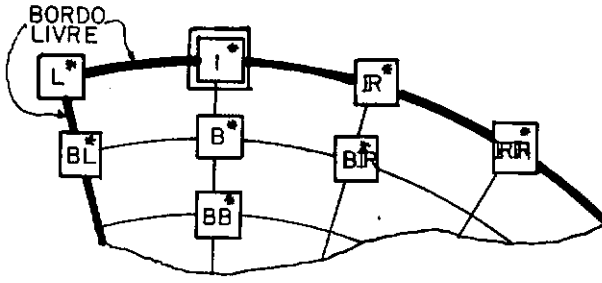
$$LL^* = 2 LL$$

$$I^* = I - BB + L^2(1+v\gamma^2\phi^2) - BL\gamma^2\eta + AL\gamma^2\psi(1-2v\psi)/2 + LL\left\{\gamma^4\left[(v^2-1/4)\phi^2 + (5v^2-3v-9/4)\phi^2 - (v^2-3v-1)\phi^3 + 5v(2-v)\phi^4\right] + \gamma^2\left[4(v-1)+8\phi^2\right] + 4\right\}$$

$$B^* = B + 2BB + L\gamma^2\phi(1-2v\phi)/2 + BL(2+\gamma^2\eta) + LL\left\{\gamma^4\left[-\phi/2 - (2v^2-2v-3/2)\phi^2 + 2v(2-v)\phi^4\right] + \gamma^2(2v\phi-4\phi^2)\right\}$$

$$BL^* = -LL\gamma^2\left[(2v-1)\phi - 2(2-v)\phi^2\right]$$

FIGURA IV-29 - Bordo Livre



$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X Y R}{N} \right]^4 + AA \frac{2R^3}{N D} \left( \frac{\partial M_r}{\partial r} \right)^i +$$

$$+ \left[ AL - AA \frac{\beta^2 (2-\nu)}{\gamma} \right] \frac{2R^2}{N \xi D} M_T^r +$$

$$+ \left\{ A + AA \left[ 2 - 2\beta + \beta^2 + \frac{2(2-\nu)\beta^2}{\gamma} \right] \right\} \frac{2R^2}{N \xi D} M_T^i + \left\{ AL + LL \frac{\gamma^2 (2-\beta)}{2\beta} + \right.$$

$$\left. - \frac{\beta^2 (2-\nu)}{\gamma} \right\} \frac{R^2}{N (1+\nu) D} M_T^l$$

$$BB^* = 2 BB$$

$$BL^* = BL - AL + LL \frac{\gamma^2}{\beta} + AA \frac{2\beta^2 (2-\nu)}{\gamma^2}$$

$$B^* = B - A \frac{\xi}{\xi} - AA \left[ 2 + 2\beta + \beta^2 + \frac{8\beta^2 (2-\nu)}{\gamma^2 \xi} + (2 - 2\beta + \beta^2) \frac{\xi}{\xi} \right]$$

$$BIR^* = BL - AL \frac{\xi}{\xi} + AA \frac{4(2-\nu)\beta^2}{\gamma^2 \xi}$$

$$L^* = L - A \frac{2\nu\beta^2}{\gamma^2 \xi} + 2AL + LL(2\beta - \gamma^2)/\beta + AA \left[ \frac{(\nu^2 - 2\nu)(4\beta^4 + 2\gamma^2\beta^3 - 2\gamma^2\beta^4) - 4\gamma^2\beta^2(2-3\beta)}{\gamma^4 \xi} \right]$$

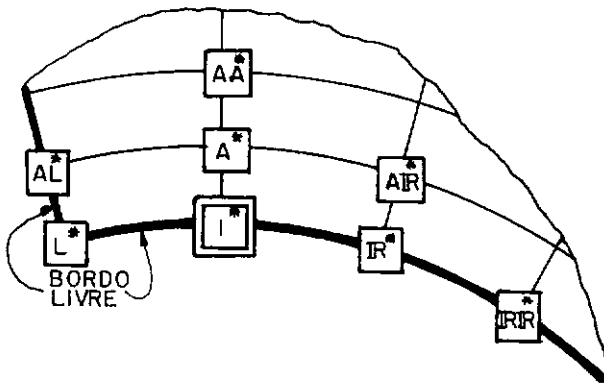
$$IR^* = L - A \frac{2\nu\beta^2}{\gamma^2 \xi} + AA \left[ \frac{2\nu(2-\nu)\gamma^2\beta^4 - 8\beta^4\nu(2-\nu) - 4\gamma^2\beta^2(2-3\beta)}{\gamma^4 \xi} \right] + AL \frac{4(\gamma^2 + \nu\beta^2)}{\gamma^2 \xi}$$

$$IRIR^* = LL - AL \frac{2\nu\beta^2}{\gamma^2 \xi} + AA \frac{2\nu(2-\nu)\beta^4}{\gamma^4 \xi}$$

$$I^* = I - LL - AL \frac{2\nu\beta^2}{\gamma^2 \xi} + A \frac{4(\gamma^2 + \nu\beta^2)}{\gamma^2 \xi} + AA \left[ 4\beta + \frac{4(2-2\beta + \beta^2)}{\xi} + \right.$$

$$\left. + \frac{-4\nu(2-\nu)\gamma^2\beta^4 + 10\beta^4\nu(2-\nu) + 8\beta^2\gamma^2(2-3\beta)}{\gamma^4 \beta} \right]$$

FIGURA IV-30 - Bordo Livre



$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X}{N} \frac{Y}{\gamma} \frac{R}{\zeta} \right]^4 - BB \frac{2R^3}{N D} \left( \frac{\partial M_T}{\partial r} \right)^1 +$$

$$+ \left[ BL - BB \frac{\beta^2 (2-\nu)}{\gamma^2} \right] \frac{2R^2}{N \zeta D} \frac{M_T^r}{D} +$$

$$+ \left\{ B + BB \left[ 2 + 2\beta + \beta^2 + \frac{2\beta^2 (2-\nu)}{\gamma^2} \right] \right\} \frac{2R^2}{N \zeta D} M_T^i +$$

$$+ \left[ BL + LL \frac{\gamma^2 (2+\beta)}{2\beta^2} - \frac{\beta^2 (2-\nu)}{\gamma^2} \right] \frac{R^2}{N (1+\nu) D} M_T^l$$

$$AA^* = 2 AA$$

$$AL^* = AL - BL - LL \frac{\gamma^2}{\beta} + BB \frac{2\beta^2 (2-\nu)}{\gamma^2}$$

$$A^* = A - B \frac{\xi}{\zeta} - BB \left[ 2 - 2\beta + \beta^2 + \frac{8\beta^2 (2-\nu)}{\gamma^2 \zeta} + (2 + 2\beta + \beta^2) \frac{\xi}{\zeta} \right]$$

$$AIR^* = AL - BL \frac{\xi}{\zeta} + BB \frac{4(2-\nu)\beta^2}{\gamma^2 \zeta}$$

$$L^* = L - B \frac{2\nu\beta^2}{\gamma^2 \zeta} + 2BL + LL(2\beta + \gamma^2)/\beta + BB \left[ \frac{(\nu^2 - 2\nu)(4\beta^4 - 2\gamma^2\beta^3 - 2\gamma^2\beta^2) - 4\gamma^2\beta^2(2+3\beta)}{\gamma^4 \zeta} \right]$$

$$IR^* = L - B \frac{2\nu\beta^2}{\gamma^2 \zeta} + BB \left[ \frac{2\nu(2-\nu)\gamma^2\beta^4 - 8\beta^4\nu(2-\nu) - 4\gamma^2\beta^2(2+3\beta)}{\gamma^4 \zeta} \right] + BL \frac{4(\gamma^2 + \nu\beta^2)}{\gamma^2 \zeta}$$

continua ...

$$IR^*_{IR} = LL - BL \frac{2v\beta^2}{\gamma^2 \zeta} + BB \frac{2v(2-v)\beta^4}{\gamma^4 \zeta}$$

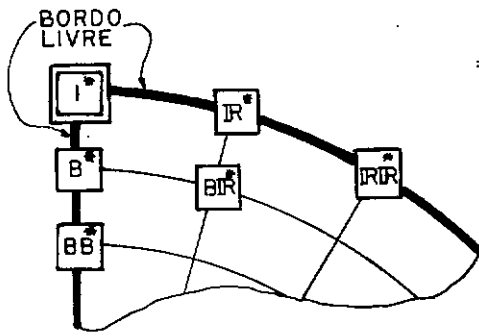
$$I^* = I - LL - BL \frac{2v\beta^2}{\gamma^2 \zeta} + B \frac{4(\gamma^2 + v\beta^2)}{\gamma^2 \zeta} + BB \left[ -4\beta + \frac{4(2+2\beta+\beta^2)}{\zeta} + \frac{-4v(2-v)\gamma^2 \beta^4 + 10\beta^4 v(2-v) + 8\beta^2 \gamma^2 (2+3\beta)}{\gamma^4 \zeta} \right]$$

FIGURA IV-31 - Bordo Livre

$$\begin{aligned}
IR^* &= AL \left[ -4\beta + \frac{8(\gamma^2 + \nu\beta^2)}{\gamma^2 \xi} \right] + AA \left[ \frac{4(2-\nu)\beta^3}{\gamma^2} - \frac{8(2-\nu)\beta^2(\gamma^2 + \nu\beta^2)}{\gamma^4 \xi} \right] + \\
&+ LL \left\{ -4 + 2\gamma^2 \left[ 1 - 2(2-\nu)\beta\eta \right] \right\} \\
I^* &= I + 2A + L(2 - \gamma^2 \beta) - (AL + BL)\gamma^2 \eta(1 + 2\nu\eta)/2 + AL \left[ -2\gamma^2 + 4\beta - \frac{4\nu\beta^2}{\gamma^2 \xi} \right] + \\
&+ AA \left[ 4 + \frac{4\nu(2-\nu)\beta^4}{\gamma^4 \xi} + \frac{4(2-\nu)\beta^2(1-\beta)}{\gamma^2} \right] + LL \left\{ \gamma^4 \left[ -\beta - (2\nu^2 - 3\nu - 2)\beta^2 + \right. \right. \\
&\left. \left. + (4\nu^2 - 7\nu - 2)\beta^3 + 2\nu(2-\nu)\beta^4 \right] + \gamma^2 \left[ (4\nu - 10)\beta + 4(2-\nu)\beta^2 - 2 \right] \right\}
\end{aligned}$$

FIGURA IV-32 - Bordo Livre





$$\begin{aligned}
 &= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X \gamma R}{N} \right]^4 + AA \frac{2R^3}{N D} \left( \frac{\partial M_T}{\partial r} \right)^i + \\
 &+ LL \frac{2\gamma X^2}{N D} \left( \frac{\partial M_T}{\partial \theta} \right)^i + \\
 &+ \left[ AL + BL - LL \frac{2(2-\nu)\gamma^2 \emptyset^2}{N D} \right] \frac{R^2 \gamma \eta^2}{N D} M_T^b + \\
 &+ \left[ AL - AA \frac{(2-\nu)\beta^2}{\gamma^2} \right] \frac{4R^2}{N \xi D} M_T^r + \left\{ -\left( L \frac{\emptyset}{2} + AL \right) (1-2\emptyset)\gamma^2 + A + \right. \\
 &+ 2 AA \left[ 1 + \frac{\beta^2 (2-\nu)}{\gamma^2} \right] - LL(1-2\emptyset) \left[ \gamma^4 \emptyset^2 \eta(2-\nu) + \gamma^2 \emptyset \left( \frac{2-\gamma^2}{2} \right) \right] \left. \right\} \frac{R^2}{(1+\nu)N D} M_T^i
 \end{aligned}$$

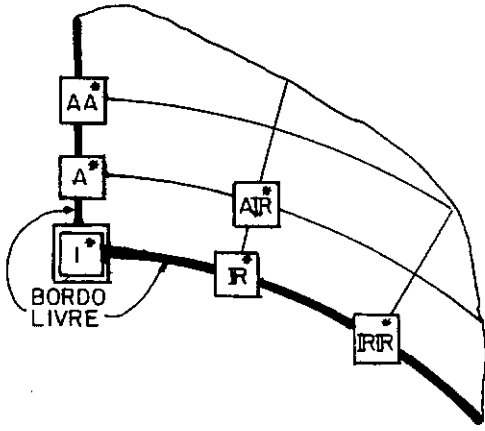
$$BB^* = AA + BB + \gamma^2 \eta(1-2\nu\eta) \left[ (AL + BL)/2 - LL(2-\nu)\gamma^2 \emptyset^2 \right]$$

$$IRIR^* = 2 LL - AL \frac{4\nu\beta^2}{\gamma^2 \xi} + AA \frac{4\nu(2-\nu)\beta^4}{\gamma^4 \xi}$$

$$BIR^* = AA \frac{8(2-\nu)\beta^2}{\gamma^2 \xi} - AL \frac{8}{\xi} + LL \frac{4(2-\nu)\gamma^2 \emptyset^2}{\xi}$$

$$\begin{aligned}
 B^* &= B - A + (AL + BL) \frac{2(1+\nu\gamma^2 \eta^2)}{N} + AL \frac{2\gamma^2}{N} + L\gamma^2 \emptyset^2 - BB \left[ 4 + \frac{4(2-\nu)\beta^2}{\gamma^2} \right] + \\
 &+ LL \left\{ \gamma^4 \left[ -\emptyset + 2(2\nu^2 - 3\nu - 2)\emptyset^2 - 2(4\nu^2 - 7\nu - 2)\emptyset^3 - 4\nu(2-\nu)\emptyset^4 \right] + \gamma^2 \left[ 2\emptyset - 4(2-\nu)\emptyset^2 \right] \right\}
 \end{aligned}$$

continua ...



$$\begin{aligned}
 &= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X \gamma R}{N} \right]^4 - \\
 &- BB \frac{2R^3}{N D} \left( \frac{\partial M_T}{\partial r} \right)^i + LL \frac{2\gamma^3 X^2}{N D} \left( \frac{\partial M_T}{\partial \theta} \right)^i + \\
 &+ \left[ BL - BB \frac{(2-\nu)\beta^2}{\gamma^2} \right] \frac{4R^2}{N \zeta D} M_T^r + \\
 &+ \left\{ \left( L \frac{\beta}{2} - BL \right) (1+2\beta)\gamma^2 + B + 2BB \left[ 1 + \frac{\beta^2 (2-\nu)}{\gamma^2} \right] + LL (1+2\beta) \left[ \gamma^4 \beta^2 \psi (2-\nu) + \right. \right. \\
 &\left. \left. - \frac{\gamma^2 \beta (2-\gamma^2)}{2} \right] \right\} \frac{R^2}{(1+\nu) N D} M_T^i + \left[ AL + BL - LL 2(2-\nu)\gamma^2 \beta^2 \right] \frac{R^2 \gamma^2 \psi}{N D} M_T^a
 \end{aligned}$$

$$AA^* = AA + BB - \gamma^2 \psi (1+2\nu\psi) \left[ (AL + BL)/2 - LL(2-\nu)\gamma^2 \beta^2 \right]$$

$$IR \ IR^* = 2 LL - BL \frac{4\nu\beta^2}{\gamma^2 \zeta} + BB \frac{4\nu(2-\nu)\beta^4}{\gamma^4 \zeta}$$

$$AIR^* = BB \frac{8(2-\nu)\beta^2}{\gamma^2 \zeta} - BL \frac{B}{\zeta} + LL \frac{4(2-\nu)\gamma^2 \beta^2}{\zeta}$$

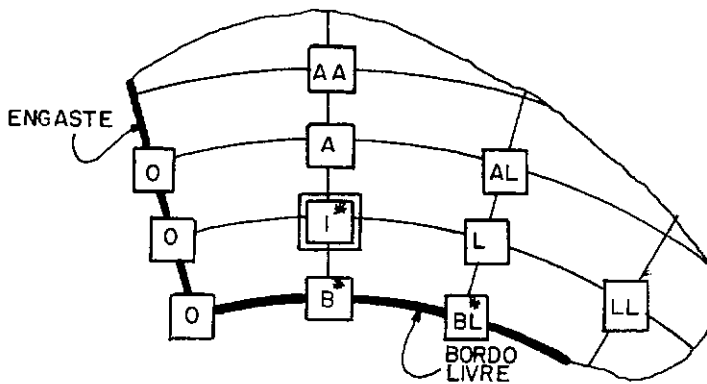
$$\begin{aligned}
 A^* &= A - B + (AL + BL) 2(1+\nu\gamma^2 \psi^2) + BL \frac{2\gamma^2}{\gamma^2} - L\gamma^2 \beta^2 - BB \left[ 4 + \frac{4(2-\nu)\beta^2}{\gamma^2} \right] + \\
 &+ LL \left\{ \gamma^4 \left[ \beta^4 + 2(2\nu^2 - 3\nu - 2)\beta^2 + 2(4\nu^2 - 7\nu - 2)\beta^3 - 4\nu(2-\nu)\beta^4 \right] + \gamma^2 \left[ -2\beta^2 - 4(2-\nu)\beta^2 \right] \right\} \\
 IR^* &= BL \left[ 4\beta + \frac{8(\gamma^2 + \nu\beta^2)}{\gamma^2 \zeta} \right] - BB \left[ \frac{4(2-\nu)\beta^3}{\gamma^2} + \frac{8(2-\nu)\beta^2}{\gamma^4 \zeta} \right] + LL \left\{ -4 + 2\gamma^2 \left[ 1 - 2(2-\nu)\beta\psi \right] \right\}
 \end{aligned}$$

continua ...

$$\begin{aligned}
I^* = & I + 2B + L(2 + \gamma^2 \emptyset) + (AL + BL)\gamma^2 \psi(1 - 2v\psi)/2 - BL \left[ 2\gamma^2 + 4\beta + \frac{4v\beta^2}{\gamma^2 \zeta} \right] + \\
& + BB \left[ 4 + \frac{4v(2-v)\beta^4}{\gamma^4 \zeta} + \frac{4(2-v)\beta^2(1+\beta)}{\gamma^2} \right] + LL \left\{ \gamma^4 \left[ -\emptyset - (2v^2 - 3v - 2)\emptyset^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. - (4v^2 - 7v - 2)\emptyset^3 + 2v(2-v)\emptyset^4 \right] + \gamma^2 \left[ -(4v - 10)\emptyset + 4(2-v)\emptyset^2 - 2 \right] + 4 \right\}
\end{aligned}$$

FIGURA IV-33 - Bordo Livre

#### 4.6.5. Bordo Engastado e Bordo Livre



$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{\chi \gamma R}{N} \right]^4 +$$

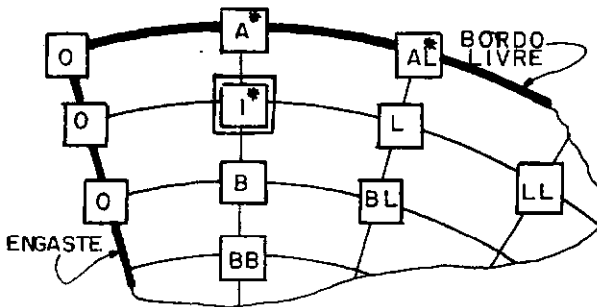
$$+ BB \frac{2R^2 \eta}{N^2 (2\eta - \nu)} \frac{M_T^b}{D}$$

$$I^* = I + LL - BB \frac{2\eta + \nu}{2\eta - \nu}$$

$$BL^* = BL - BB \frac{2\nu}{\gamma \eta (2\eta - \nu)}$$

$$B^* = B + BB \frac{4(\eta^2 \gamma + \nu)}{\gamma \eta (2\eta - \nu)}$$

FIGURA IV-34 - Bordo Engastado e Livre



$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{\chi \gamma R}{N} \right]^4 +$$

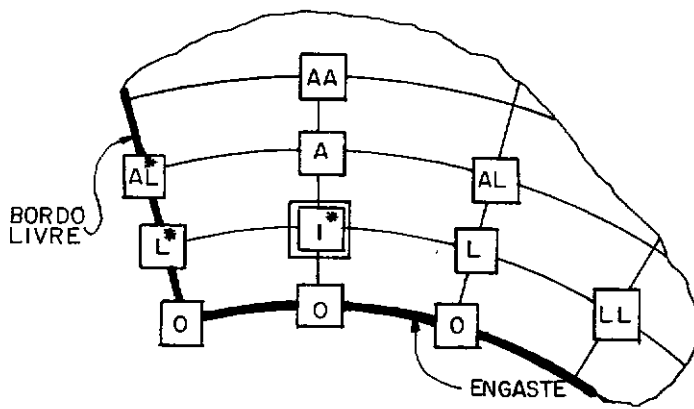
$$+ AA \frac{2R^2 \psi}{N^2 (2\psi + \nu)} \frac{M_T^a}{D}$$

$$I^* = I + LL - AA \frac{2\psi - \nu}{2\psi + \nu}$$

$$AL^* = AL - AA \frac{2\nu}{\gamma \psi (2\psi + \nu)}$$

$$A^* = A + AA \frac{4(\psi^2 \gamma + \nu)}{\gamma \psi (2\psi + \nu)}$$

FIGURA IV-35 - Bordo Engastado e Livre



$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X \gamma R}{N} \right]^4 +$$

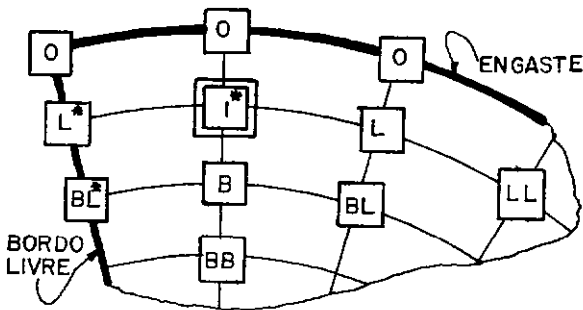
$$+ LL \frac{X^2 \gamma^2}{N^2} \frac{M_T^L}{D}$$

$$I^* = I + BB - LL$$

$$L^* = L + LL \cdot 2(1 + \nu \gamma^2 \theta^2)$$

$$AL^* = AL - LL \gamma^2 \theta^2 (1 + 2\nu \theta^2)/2$$

FIGURA IV-36 - Bordo Engastado e Livre



$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X \gamma R}{N} \right]^4 +$$

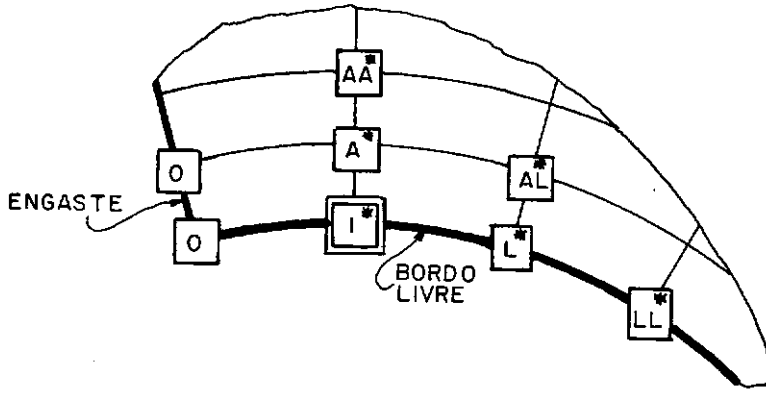
$$+ LL \frac{X^2 \gamma^2}{N^2} \frac{M_T^L}{D}$$

$$I^* = I - LL + AA$$

$$L^* = L + LL \cdot 2(1 + \nu \gamma^2 \theta^2)$$

$$BL^* = BL + LL \gamma^2 \theta^2 (1 - 2\nu \theta^2)/2$$

FIGURA IV-37 - Bordo Engastado e Livre



$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X Y R}{N} \right]^4 +$$

$$- BB \frac{2R^3}{N D} \left( \frac{\partial M_T}{\partial r} \right)^i +$$

$$+ \left[ BL - BB \frac{\beta^2 (2-\nu)}{\gamma} \right] \frac{2R^2}{N \zeta D} (M_T^l + M_T^r) + \left\{ B + BB \left[ 2 + 2\beta + \beta^2 + \frac{2\beta^2 (2-\nu)}{\gamma} \right] \right\} \frac{2R^2}{N \xi D} M_T^i$$

$$AA^* = AA + BB$$

$$A^* = A - B \frac{\xi}{\zeta} - BB \left[ 2 - 2\beta + \beta^2 + \frac{8(2-\nu)\beta^2}{\gamma \zeta} + (2 + 2\beta + \beta^2) \frac{\xi}{\zeta} \right]$$

$$LL^* = LL - BL \frac{2\nu\beta^2}{\gamma \zeta} + BB \frac{2\nu(2-\nu)\beta^4}{\gamma \zeta}$$

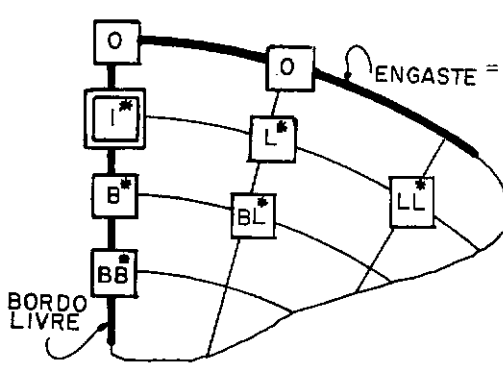
$$AL^* = AL + BB \frac{4(2-\nu)\beta^2}{\gamma \zeta} - BL \frac{\xi}{\zeta}$$

$$L^* = L - B \frac{2\nu\beta^2}{\gamma \zeta} + BL \frac{4(\gamma + \nu\beta^2)}{\gamma \zeta} - BB \left[ \frac{4\beta^2 \gamma^2 (2+3\beta) + 8\beta^4 \nu(2-\nu) - 2\gamma^2 \beta^4 \nu(2-\nu)}{\gamma \zeta} \right]$$

$$I^* = I + B \frac{4(\gamma + \nu\beta^2)}{\gamma \zeta} - BL \frac{6\nu\beta^2}{\gamma \zeta} + BB \left[ -4\beta + \frac{4(2+2\beta+\beta^2)}{\zeta} + \right.$$

$$\left. + \frac{8\beta^2 \gamma^2 (2+3\beta) + 14\beta^4 \nu(2-\nu) - 4\gamma^2 \beta^4 \nu(2-\nu)}{\gamma \zeta} \right]$$

FIGURA IV-38 - Bordo Engastado e Livre



$$\Delta M_T^i = \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{\dot{X} \dot{Y} R}{N} \right]^4 + LL \frac{2 \dot{Y} \dot{X}}{N^2 D} \left( \frac{\partial M_T}{\partial \theta} \right)^i +$$

$$+ \left\{ AL - LL \gamma^2 \left[ \frac{(2\nu-1)\delta^2}{2} + (2-\nu)\delta^2 \right] \right\} \frac{R \gamma \psi}{N^2 D} M_T^a +$$

$$+ \left\{ BL + LL \gamma^2 \left[ \frac{(2\nu-1)\delta^2}{2} - (2-\nu)\delta^2 \right] \right\} \frac{R \gamma \eta}{N^2 D} M_T^b +$$

$$+ \left\{ L + LL \left[ 2-2(1-\nu)\gamma^2 + 2(2-\nu)\gamma^2 \delta^2 \right] \right\} \frac{X \dot{Y}}{N^2 D} M_T^i$$

$$LL^* = 2 LL$$

$$L^* = -2 LL \left[ 2-2(1-\nu)\gamma^2 + 2(2-\nu)\gamma^2 \delta^2 \right]$$

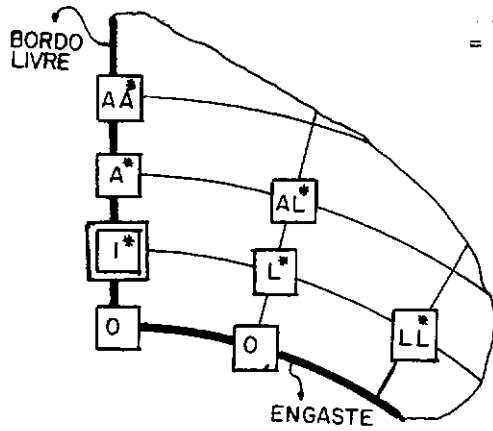
$$BL^* = LL \gamma^2 \left[ -(2\nu-1)\delta^2 + 2(2-\nu)\delta^2 \right]$$

$$BB^* = BB + BL \gamma^2 \eta \left[ 1-2\nu\eta \right] / 2 + LL \gamma^4 \left[ -(\nu^2 - 1/4)\delta^2 + (\nu^2 + \nu + 3/4)\delta^2 \right. \\ \left. + (\nu^2 - 3\nu - 1)\delta^3 + \nu(2-\nu)\delta^4 \right]$$

$$B^* = B + L \gamma^2 \delta^2 (1-2\nu\delta^2) / 2 + BL 2 (1+\nu\gamma^2 \eta^2) + LL \left\{ \gamma^4 \left[ -(1-2\nu^2)\delta^2 - 4\nu^2 \delta^2 \right. \right. \\ \left. \left. - 2(\nu^2 - 3\nu - 1)\delta^3 - 4\nu(2-\nu)\delta^4 \right] - 2\gamma^2 \left[ -\nu\delta^2 + 2\delta^2 \right] \right\}$$

$$I^* = I - BL \gamma^2 \eta (1+2\nu\eta) / 2 + L 2 (1+\nu\gamma^2 \delta^2) - AL 2 \nu \gamma^2 \psi + LL \left\{ \gamma^4 \left[ -(1/4 - \nu^2)\delta^2 \right. \right. \\ \left. \left. + (7\nu^2 - \nu - 3/4)\delta^2 - (\nu^2 - 3\nu - 1)\delta^3 + 7\nu(2-\nu)\delta^4 \right] + \gamma^2 \left[ 4(\nu-1) + 8\delta^2 \right] + 4 \right\}$$

FIGURA IV-39 - Bordo Engastado e Livre



$$\begin{aligned}
 &= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X Y R}{N} \right]^4 + LL \frac{2Y X^3}{N^2 D} \left( \frac{\partial M_T}{\partial \theta} \right)^1 + \\
 &+ \left\{ AL - LL \gamma^2 \left[ \frac{(2\nu-1)\vartheta}{2} + (2-\nu)\vartheta^2 \right] \right\} \frac{R^2 \gamma \psi^2}{N^2 D} M_T^a + \\
 &+ \left\{ BL + LL \gamma^2 \left[ \frac{(2\nu-1)\vartheta}{2} - (2-\nu)\vartheta^2 \right] \right\} \frac{R^2 \gamma \psi^2}{N^2 D} M_T^b + \\
 &+ \left\{ L + LL \left[ 2-2(1-\nu)\gamma^2 + 2(2-\nu)\gamma^2 \vartheta^2 \right] \right\} \frac{X Y}{N^2 D} M_T^i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A^* &= A - L \gamma^2 \vartheta^2 (1+2\nu\vartheta)/2 + AL \left[ 2 \left[ 1+\nu \gamma^2 \vartheta^2 \right] + LL \left\{ \gamma^4 \left[ (1-2\nu^2)\vartheta - 4\nu \vartheta^2 \right] + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2(\nu^2 - 3\nu - 1)\vartheta^3 - 4\nu(2-\nu)\vartheta^4 \right] - 2\gamma^2 \left[ \nu\vartheta + 2\vartheta^2 \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 AA^* &= AA - AL \gamma^2 \psi^2 (1+2\nu\psi)/2 + LL \gamma^4 \left[ (\nu^2 - 1/4)\vartheta + (\nu^2 + \nu + 3/4)\vartheta^2 + \right. \\
 &\quad \left. - (\nu^2 - 3\nu - 1)\vartheta^3 + \nu(2-\nu)\vartheta^4 \right]
 \end{aligned}$$

$$AL^* = LL \gamma^2 \left[ (2\nu-1)\vartheta + 2(2-\nu)\vartheta^2 \right]$$

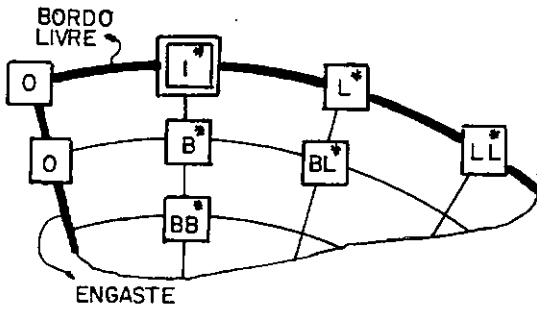
$$L^* = -2 LL \left[ 2-2(1-\nu)\gamma^2 + 2(2-\nu)\gamma^2 \vartheta^2 \right]$$

$$LL^* = 2 LL$$

$$\begin{aligned}
 I^* &= I + AL \gamma^2 \psi^2 \left[ 1-2\nu\psi \right]/2 + L \left[ 2(1+\nu \gamma^2 \vartheta^2) - BL \right] 2\nu \gamma^2 \eta^2 + LL \left\{ \gamma^4 \left[ (1/4-\nu^2)\vartheta + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (7\nu^2 - \nu - 3/4)\vartheta^2 + (\nu^2 - 3\nu - 1)\vartheta^3 + 7\nu(2-\nu)\vartheta^4 \right] + \gamma^2 \left[ 4(\nu-1) + 8\vartheta^2 \right] + 4 \right\}
 \end{aligned}$$

FIGURA IV-40 - Bordo Engastado e Livre





$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X Y R}{N} \right]^4 +$$

$$+ AA \frac{2R}{N D} \left[ \frac{\partial M_T}{\partial r} \right]^1 +$$

$$+ \left[ AL - AA \beta^2 \frac{(2-\nu)}{2} \right] \frac{2R^2}{N \xi D} (M_T^r + M_T^l) + \left\{ A + AA \left[ 2 - 2\beta + \beta^2 + \frac{2\beta^2(2-\nu)}{2} \right] \right\} \frac{2R^2}{N \xi D} M_T^i$$

$$BB^* = AA + BB$$

$$B^* = B - A \frac{\xi}{\xi} - AA \left[ 2 + 2\beta + \beta^2 + \frac{8(2-\nu)\beta^2}{\gamma^2 \xi} + (2 - 2\beta + \beta^2) \frac{\xi}{\xi} \right]$$

$$LL^* = LL - AL \frac{2\nu\beta}{\gamma^2 \xi} + AA \frac{2\nu\xi\beta}{\gamma^4 \xi}$$

$$BL^* = BL + AA \frac{4(2-\nu)\beta^2}{\gamma^2 \xi} - AL \frac{\xi}{\xi}$$

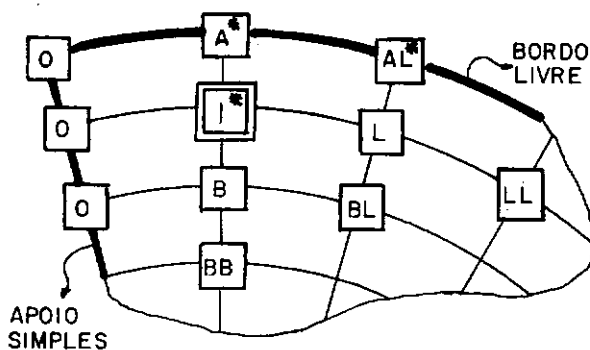
$$L^* = L - AA \left[ \frac{4\beta^2 \gamma^2 (2-3\beta) + 8\beta^4 \nu(2-\nu) - 2\beta^4 \gamma^2 \nu(2-\nu)}{\gamma^4 \xi} \right] - A \frac{2\nu\beta}{\gamma^2 \xi} + AL \frac{4(\gamma^2 + \nu\beta^2)}{\gamma^2 \xi}$$

$$I^* = I + A \frac{4(\gamma^2 + \nu\beta^2)}{\gamma^2 \xi} - AL \frac{6\nu\beta}{\gamma^2 \xi} + AA \left[ 4\beta + \frac{4(2-2\beta + \beta^2)}{\xi} + \right.$$

$$\left. + \frac{8\beta^2 \gamma^2 (2-3\beta) + 14\beta^4 \nu(2-\nu) - 4\gamma^2 \beta^2 \nu(2-\nu)}{\gamma^4 \xi} \right]$$

FIGURA IV-41. - Bordo Engastado e Livre

## 4.6.6. Bordo Simplesmente Apoiado e Bordo Livre



$$I^* = I - LL - AA \frac{2\psi - \nu}{2\psi + \nu}$$

$$AL^* = AL - AA \frac{2\nu}{\gamma \psi (2\psi + \nu)}$$

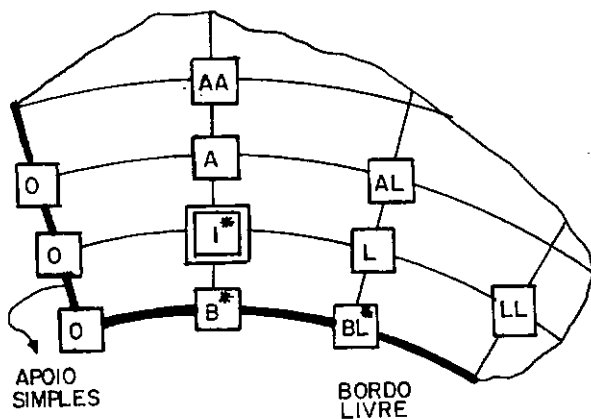
$$A^* = A + AA \frac{4(\psi \gamma + \nu)}{\gamma \psi (2\psi + \nu)}$$

$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X Y R}{N} \right]^4 +$$

$$+ LL \frac{X Y}{N^2} \frac{M_T^l}{D} +$$

$$+ AA \frac{2R \psi}{N (2\psi + \nu)} \frac{M_T^a}{D}$$

FIGURA IV-42 - Bordo Simplesmente Apoiado e Livre



$$I^* = I - LL - BB \frac{2\eta + \nu}{2\eta - \nu}$$

$$B^* = B + BB \frac{4(\eta \gamma + \nu)}{\gamma \eta (2\eta - \nu)}$$

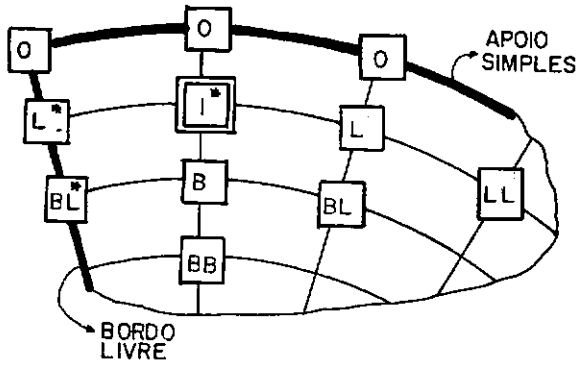
$$BL^* = BL - BB \frac{2\nu}{\gamma \eta (2\eta - \nu)}$$

$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X Y R}{N} \right]^4 +$$

$$+ LL \frac{X Y}{N^2} \frac{M_T^l}{D} +$$

$$+ BB \frac{2R \eta}{N (2\eta - \nu)} \frac{M_T^b}{D}$$

FIGURA IV-43 - Bordo Simplesmente Apoiado e Livre



$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X \ Y \ R}{N} \right]^4 +$$

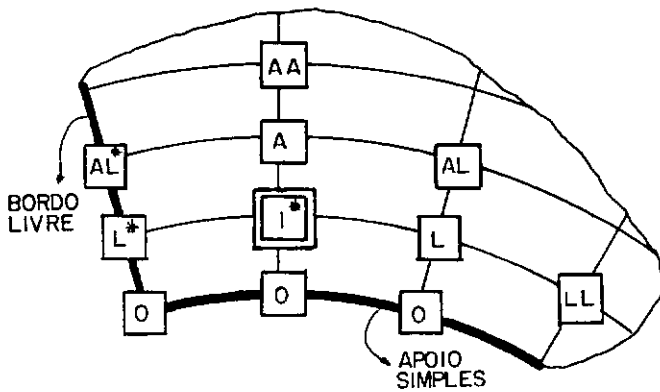
$$+ LL \frac{X^2 Y^2}{N^2} \frac{M_T^l}{D} + AA \frac{2R^2 \psi^2}{N (2\psi + \nu)} \frac{M_T^a}{D}$$

$$I^* = I - LL - AA \frac{2\psi - \nu}{2\psi + \nu}$$

$$BL^* = BL + LL \gamma^2 \frac{(1 - 2\nu\theta)}{2}$$

$$L^* = L + LL \frac{2(1 + \nu\gamma^2 \theta^2)}{2}$$

FIGURA IV-44 - Bordo Simplesmente Apoiado e Livre



$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X \ Y \ R}{N} \right]^4 +$$

$$+ LL \frac{X^2 Y^2}{N^2} \frac{M_T^l}{D} +$$

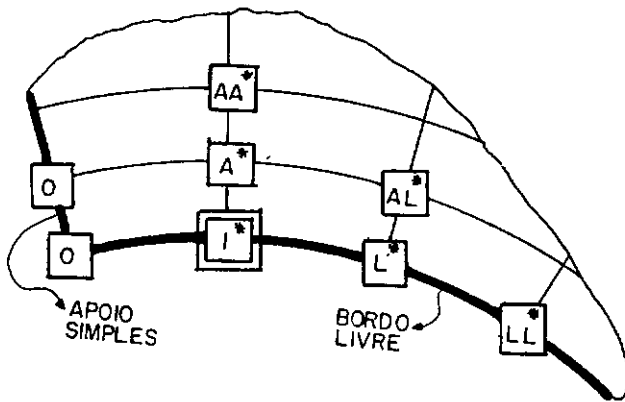
$$+ BB \frac{2R^2 \eta^2}{N (2\eta - \nu)} \frac{M_T^b}{D}$$

$$I^* = I - LL - BB \frac{2\eta + \nu}{2\eta - \nu}$$

$$L^* = L + LL \frac{2(1 + \nu\gamma^2 \theta^2)}{2}$$

$$AL^* = AL - LL \gamma^2 \frac{(1 + 2\nu\theta)}{2}$$

FIGURA IV-45 - Bordo Simplesmente Apoiado e Livre



$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X}{N} \frac{Y}{\gamma} \frac{R}{\zeta} \right]^4 +$$

$$- BB \frac{2R^3}{N^3 D} \left[ \frac{\partial M_T}{\partial r} \right]^1 +$$

$$+ \left[ BL - BB \frac{\beta^2 (2-\nu)}{\gamma^2} \right] \frac{2R^2}{N^2 \zeta D} M_T^r +$$

$$+ \left\{ B + BB \left[ 2 + 2\beta + \beta^2 + \frac{2\beta^2 (2-\nu)}{\gamma^2} \right] \right\} \frac{2R^2}{N^2 \zeta D} M_T^i +$$

$$+ \left[ AL + LL \frac{\gamma^2 \beta^2 (2+\beta)}{2} - BB \frac{\beta^2 (2-\nu)}{\gamma^2} \right] \frac{R^2}{N^2 D (1+\nu)} M_T^l$$

$$AA^* = AA + BB$$

$$A^* = A - B \frac{\xi}{\zeta} - BB \left[ 2 - 2\beta + \beta^2 + \frac{8(2-\nu)\beta^2}{\gamma^2 \zeta} + (2 + 2\beta + \beta^2) \frac{\xi}{\zeta} \right]$$

$$LL^* = LL - BL \frac{2\nu\beta^2}{\gamma^2 \zeta} + BB \frac{2\nu(2-\nu)\beta^4}{\gamma^4 \zeta}$$

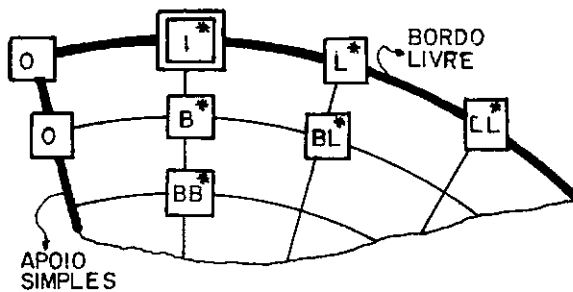
$$L^* = L - B \frac{2\nu\beta^2}{\gamma^2 \zeta} + BL \frac{4(\gamma^2 + \nu\beta^2)}{\gamma^2 \zeta} - BB \left[ \frac{4\beta^2 \gamma^2 (2+3\beta) + 8\beta^4 \nu(2-\nu) - 2\gamma^2 \beta^4 \nu(2-\nu)}{\gamma^4 \zeta} \right]$$

$$AL^* = AL + BB \frac{4(2-\nu)\beta^2}{\gamma^2 \zeta} - BL \frac{\xi}{\zeta}$$

$$I^* = I - LL + B \frac{4(\gamma^2 + \nu\beta^2)}{\gamma^2 \zeta} - BL \frac{2\nu\beta^2}{\gamma^2 \zeta} + BB \left[ -4\beta + \frac{4(2+2\beta+\beta^2)}{\zeta} + \right.$$

$$\left. + \frac{8\beta^2 \gamma^2 (2+3\beta) + 10\beta^4 \nu(2-\nu) - 4\gamma^2 \beta^4 \nu(2-\nu)}{\gamma^4 \zeta} \right]$$

FIGURA IV-46 - Bordo Simplesmente Apoiado e Livre



$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X Y R}{N} \right]^4 +$$

$$+ AA \frac{2R^3}{N D} \left( \frac{\partial M_T}{\partial r} \right)^i$$

$$+ \left[ AL - AA \frac{\beta^2 (2-\nu)}{\gamma^2} \right] \frac{2R^2}{N \xi D} M_T^r + \left\{ A + AA \left[ 2 - 2\beta + \beta^2 + \frac{2\beta^2 (2-\nu)}{\gamma^2} \right] \right\} \frac{2R^2}{N \xi D} M_T^i +$$

$$+ \left[ AL + LL \frac{\gamma^2 \beta^2 (2-\beta)}{2} - AA \frac{\beta^2 (2-\nu)}{\gamma^2} \right] \frac{R^2}{N (1+\nu) D} M_T^l$$

$$BB^* = AA + BB$$

$$B^* = B - A \frac{\xi}{\gamma} - AA \left[ 2 + 2\beta + \beta^2 + \frac{8(2-\nu)\beta^2}{\gamma^2 \xi} + (2 - 2\beta + \beta^2) \frac{\xi}{\gamma} \right]$$

$$LL^* = LL - AL \frac{2\nu\beta^2}{\gamma^2 \xi} + AA \frac{2\nu(2-\nu)\beta^4}{\gamma^4 \xi}$$

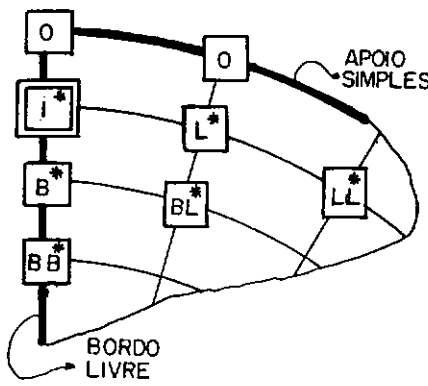
$$L^* = L - A \frac{2\nu\beta^2}{\gamma^2 \xi} + AL \frac{4(\gamma^2 + \nu\beta^2)}{\gamma^2 \xi} - AA \left[ \frac{4\beta^2 \gamma^2 (2-3\beta) + 8\beta^4 \nu(2-\nu) - 2\gamma^2 \beta^4 \nu(2-\nu)}{\gamma^4 \xi} \right]$$

$$BL^* = BL + AA \frac{4(2-\nu)\beta^2}{\gamma^2 \xi} - AL \frac{\xi}{\gamma}$$

$$I^* = I - LL + A \frac{4(\gamma^2 + \nu\beta^2)}{\gamma^2 \xi} - AL \frac{2\nu\beta^2}{\gamma^2 \xi} + AA \left[ 4\beta^2 + \frac{4(2-2\beta + \beta^2)}{\xi} + \right.$$

$$\left. + \frac{8\beta^2 \gamma^2 (2-3\beta) + 10\beta^4 \nu(2-\nu) - 4\gamma^2 \beta^4 \nu(2-\nu)}{\gamma^4 \xi} \right]$$

FIGURA IV-47 - Bordo Simplesmente Apoiado e Livre



$$= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X Y R}{N} \right]^4 + LL \frac{2Y X}{N D} \left( \frac{\partial M_T}{\partial \theta} \right)^i +$$

$$+ \left\{ BL + LL \gamma^2 \left[ \frac{(2\nu-1)\phi}{2} - (2-\nu)\phi^2 \right] \right\} \frac{R^2 Y \eta}{N D} M_T^b +$$

$$+ \left\{ L + LL \left[ 2-2(1-\nu)\gamma^2 + 2(2-\nu)\gamma^2 \phi^2 \right] \right\} \frac{X Y}{N D} M_T^i +$$

$$+ AA \frac{R^2}{N (1+\nu) D} M_T^a + \left\{ AL - LL \gamma^2 \left[ \frac{(2\nu-1)\phi}{2} + (2-\nu)\phi^2 \right] \right\} \left[ \frac{3+2\phi+4\nu\psi}{2(1+\nu)} \right] \frac{R^2 Y \psi}{N D} M_T^a$$

$$BB^* = BB + BL \gamma^2 \eta (1-2\nu\eta)/2 + LL \gamma^4 \left[ -(\nu^2 - 1/4)\phi + (\nu^2 + \nu + 3/4)\phi^2 + \right.$$

$$\left. + (\nu^2 - 3\nu - 1)\phi^3 + \nu(2-\nu)\phi^4 \right]$$

$$B^* = B + L \gamma^2 \phi (1-2\nu\phi)/2 + BL 2(1+\nu\gamma^2 \eta) + LL \left\{ \gamma^4 \left[ -(1-2\nu^2)\phi - 4\nu^2 \phi^2 - \right. \right.$$

$$\left. - 2(\nu^2 - 3\nu - 1)\phi^3 - 4\nu(2-\nu)\phi^4 \right] - 2 \gamma^2 \left[ -\nu\phi + 2\phi^2 \right] \right\}$$

$$BL^* = LL \gamma^2 \left[ -(2\nu-1)\phi + 2(2-\nu)\phi^2 \right]$$

$$LL^* = 2 LL$$

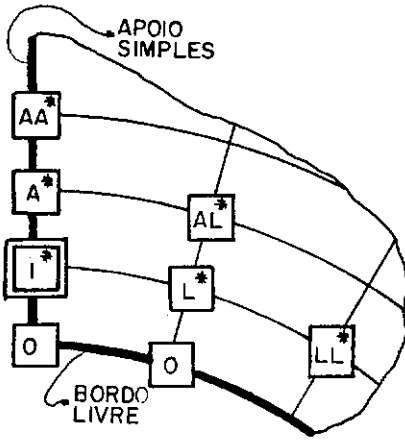
$$L^* = -LL 2 \left[ 2-2(1-\nu)\gamma^2 + 2(2-\nu)\gamma^2 \phi^2 \right]$$

$$I^* = I + L 2(1+\nu\gamma^2 \phi^2) - BL \gamma^2 \eta (1+2\nu\eta)/2 + AA - AL 2\nu\gamma^2 \psi +$$

$$+ LL \left\{ \gamma^4 \left[ (\nu^2 - 1/4)\phi + (7\nu^2 - \nu - 3/4)\phi^2 - (\nu^2 - 3\nu - 1)\phi^3 + 7\nu(2-\nu)\phi^4 \right] + \right.$$

$$\left. + \gamma^2 \left[ 4(\nu-1) + 8\phi^2 \right] + 4 \right\}$$

FIGURA IV-48 - Bordo Simplesmente Apoiado e Livre



$$\begin{aligned}
 &= \frac{P_z^*(r, \theta)}{D} \left[ \frac{X}{N} \frac{Y}{N} \frac{R}{N} \right]^4 + LL \frac{2\gamma \cdot X}{N^2} \left( \frac{\partial M_T}{\partial \theta} \right)^1 + \\
 &+ \left\{ AL - LL \gamma^2 \left[ \frac{(2\nu-1)\vartheta^2}{2} + (2-\nu)\vartheta^2 \right] \right\} \frac{R \gamma \psi}{N^2 D} M_T^a + \\
 &+ \left\{ L + LL \left[ 2 - 2(1-\nu)\gamma^2 + 2(2-\nu)\gamma^2 \vartheta^2 \right] \right\} \frac{X \gamma}{N^2} \frac{M_T^1}{D} + \\
 &+ BB \frac{R^2}{N^2 (1+\nu) D} M_T^b + \left\{ BL + LL \gamma^2 \left[ \frac{(2\nu-1)\vartheta^2}{2} - (2-\nu)\vartheta^2 \right] \right\} \left[ \frac{3-2\vartheta-4\nu\eta}{(2+\nu)} \right] \frac{R \gamma^2}{N^2 D} \eta M_T^b
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 AA^* &= AA - AL \gamma^2 \psi (1+2\nu\psi)/2 + LL \gamma^4 \left[ (\nu^2 - 1/4)\vartheta^2 + (\nu^2 + \nu + 3/4)\vartheta^2 - (\nu^2 - 3\nu - 1)\vartheta^3 + \right. \\
 &\quad \left. + \nu(2-\nu)\vartheta^4 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A^* &= A - L \gamma^2 \vartheta (1+2\nu\vartheta)/2 + AL \gamma^2 \left[ 1 + \nu \gamma^2 \vartheta^2 \right] + LL \left\{ \gamma^4 \left[ (1-2\nu^2)\vartheta^2 - 4\nu^2 \vartheta^2 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2(\nu^2 - 3\nu - 1)\vartheta^3 - 4\nu(2-\nu)\vartheta^4 \right] - 2\gamma^2 \left[ \nu\vartheta + 2\vartheta^2 \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$AL^* = LL \gamma^2 \left[ (2\nu-1)\vartheta^2 + 2(2-\nu)\vartheta^2 \right]$$

$$LL^* = 2 LL$$

$$L^* = -LL \gamma^2 \left[ 2 - 2(1-\nu)\gamma^2 + 2(2-\nu)\gamma^2 \vartheta^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
 I^* &= I + L \gamma^2 (1 + \nu \gamma^2 \vartheta^2) + AL \gamma^2 \psi \left[ 1 - 2\nu\psi \right] / 2 - BB - BL \gamma^2 \eta + LL \left\{ \gamma^4 \left[ (\nu^2 - 3/4)\vartheta^2 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (5\nu^2 - 3\nu - 7/4)\vartheta^2 - (\nu^2 - 3\nu - 1)\vartheta^3 + 5\nu(2-\nu)\vartheta^4 \right] + \gamma^2 \left[ 4(\nu-1) + 8\vartheta^2 \right] + 4 \right\}
 \end{aligned}$$

FIGURA IV-49 - Bordo Simplesmente Apoiado e Livre

#### 4.7. Obtenção dos Esforços:

De posse das flechas em cada um dos pontos nodais da malha, obtidas através de raciocínio análogo ao do item 2.6., calcularemos os esforços com uso das expressões esquematizadas na fig. (IV-50)

$$(M_r)^i \approx - \frac{DN^2}{R^2} \left[ \begin{array}{c} \text{Diagrama 1} \end{array} \right] \{w\} - M_T$$

$$(M_\theta)^i \approx - \frac{DN^2}{R^2} \left[ \begin{array}{c} \text{Diagrama 2} \end{array} \right] \{w\} - M_T$$



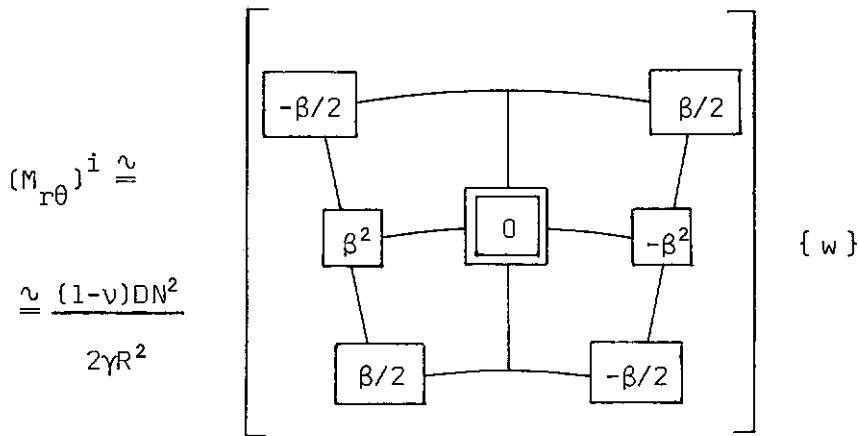
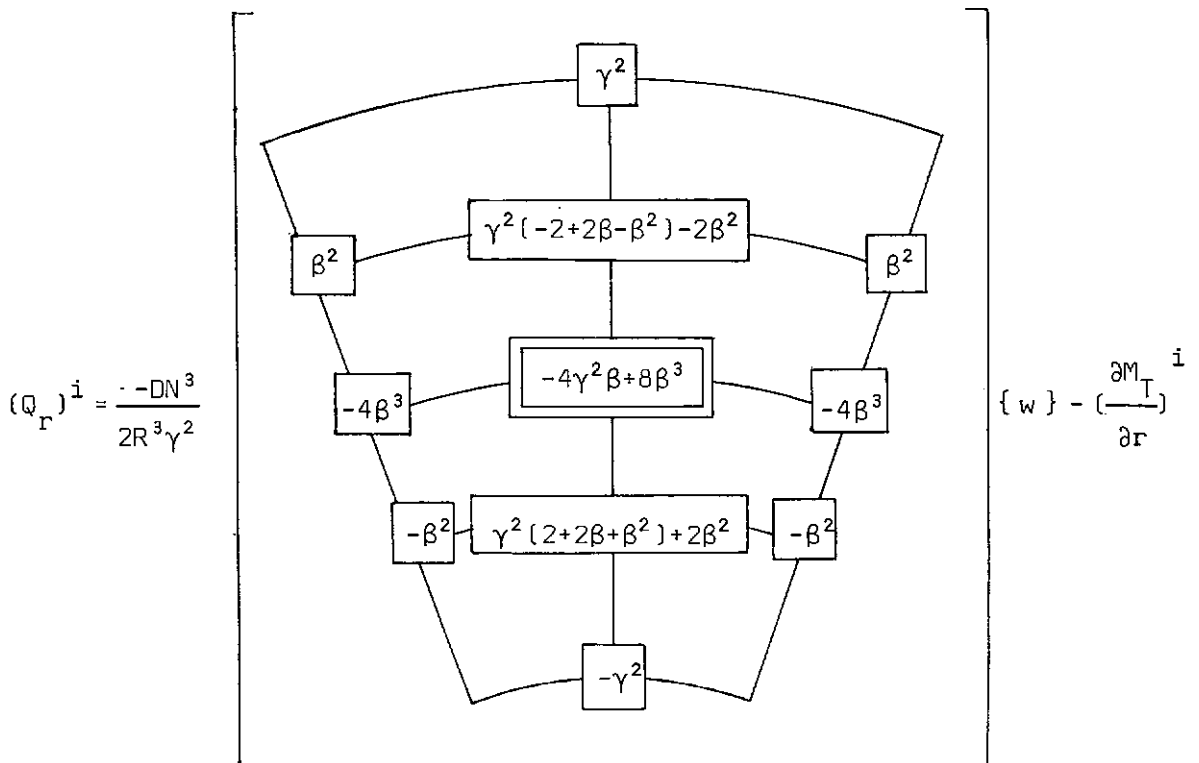


FIGURA IV-50 - Expressões em diferenças finitas para cálculo dos momentos:  $\beta = R/\chi_1$



$$(Q_\theta)^i = \frac{-DN^3}{2\gamma^3 \chi R^2} \left[ \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & -\gamma^2(1+\beta/2) & & \gamma^2(1+\beta/2) & \\ & | & & | & \\ & \diagdown & & \diagup & \\ -\beta^2 & 2(\beta^2+\gamma^2) & \boxed{0} & -2(\beta^2+\gamma^2) & \beta^2 \\ & \diagup & & \diagdown & \\ & -\gamma^2(1-\beta/2) & & \gamma^2(1-\beta/2) & \end{array} \\ \end{array} \right] \{w\} - \left( \frac{\partial M_T}{\partial \theta} \right)^i$$

$$(V_r)^i = \frac{-DN^3}{2R^3\gamma^2} \left[ \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & \gamma^2 & & \\ & & | & & \\ & \diagdown & & \diagup & \\ (2-\nu)\beta^2 & \gamma^2(-2+2\beta-\beta^2)-2(2-\nu)\beta^2 & & (2-\nu)\beta^2 & \\ & | & & | & \\ 2(\nu-3)\beta^3 & \boxed{-4\gamma^2\beta-4(\nu-3)\beta^3} & & 2(\nu-3)\beta^3 & \\ & | & & | & \\ -(2-\nu)\beta^2 & \gamma^2(2+2\beta+\beta^2)+2(2-\nu)\beta^2 & & -(2-\nu)\beta^2 & \\ & \diagdown & & \diagup & \\ & & -\gamma^2 & & \end{array} \\ \end{array} \right] \{w\} - \left( \frac{\partial M_T}{\partial r} \right)^i$$

Nas figuras (IV-50 e 51) o ponto nodal genérico "i" onde se deseja calcular os esforços internos é representado pelos dois retângulos concêntricos.

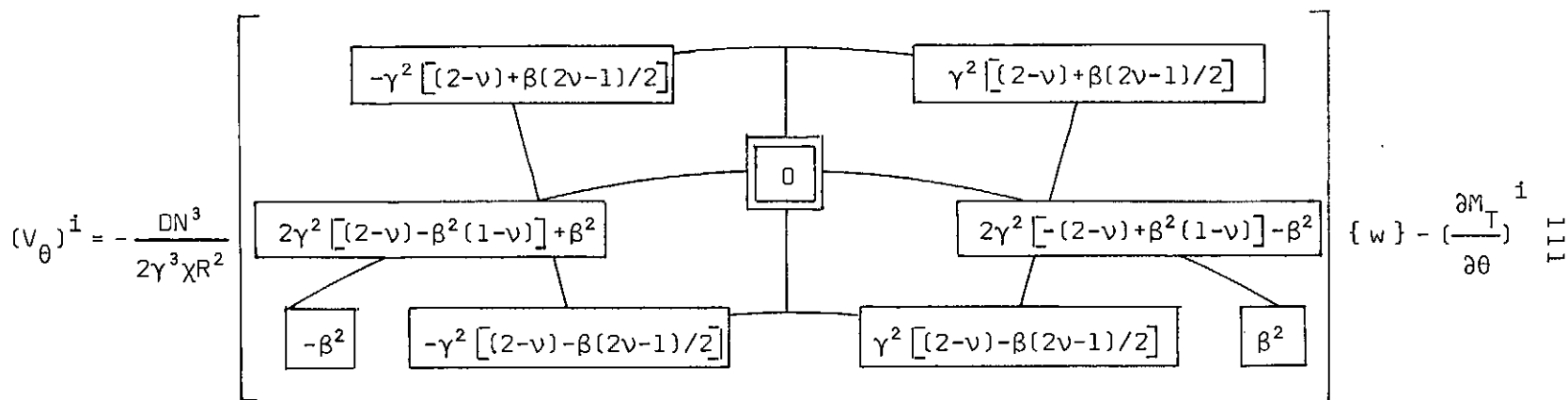


FIGURA IV-51 - Expressões em diferenças finitas para cálculo dos esforços cortantes:

$$\beta = R/X_1$$

## CAPÍTULO V

### PLACAS ORTOTRÓPICAS

#### 5.1. Introdução

Este capítulo é dedicado ao estudo de placas retangulares de espessura constante possuindo três planos de simetria mutuamente perpendiculares com relação às suas propriedades elásticas em cada ponto da placa.

Deduzidas inicialmente as equações fundamentais gerais, são obtidas a seguir as soluções das mesmas no caso de atuação de um campo térmico  $T = T(z)$  variável ao longo da espessura da placa. Estas soluções serão obtidas com o método das diferenças finitas.

#### 5.2. Hipóteses e Equações Básicas

Associadas as hipóteses descritas no item 2.1., admitiremos que as direções principais de ortotropia coincidam com as direções  $X, Y$  [figura (II-1)] dos eixos coordenados, e que as características elásticas se mantêm constantes ao longo dos planos coordenados.

Designando portanto num ponto genérico da placa de coordenadas  $(x, y, z)$  por  $E_x, E_y, \nu_x$  e  $\nu_y$ , respectivamente os

módulos de elasticidade normal e os coeficientes de Poisson relativos às direções X e Y e por  $G_{xy}$  o módulo de elasticidade tangencial, resultam constantes os valores dos mesmos ao variar x, y e z. Sendo  $\alpha_{Tx}$  e  $\alpha_{Ty}$  os coeficientes de dilatação térmica segundo as direções principais de ortotropia temos as seguintes relações tensão-deformação:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_y \frac{\sigma_y}{E_y} + \alpha_{Tx} T \quad (V-1a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - \nu_x \frac{\sigma_x}{E_x} + \alpha_{Ty} T \quad (V-1b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \quad (V-1c)$$

ou exprimindo as tensões em termos das deformações:

$$\sigma_x = \frac{E_x}{1-\nu_x \nu_y} \left[ \epsilon_x + \nu_y \epsilon_y - (\alpha_{Tx} + \nu_y \alpha_{Ty}) T \right] \quad (V-2a)$$

$$\sigma_y = \frac{E_y}{1-\nu_x \nu_y} \left[ \epsilon_y + \nu_x \epsilon_x - (\alpha_{Ty} + \nu_x \alpha_{Tx}) T \right] \quad (V-2b)$$

$$\tau_{xy} = G_{xy} \gamma_{xy} \quad (V-2c)$$

Empregando-se as relações deformação-deslocamento expressas por (II-2), (II-3) e (II-4), nas equações (V-2), temos:

$$\sigma_x = \frac{E_x}{1-\nu_x \nu_y} \left[ z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + z \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (\alpha_{Tx} + \nu_y \alpha_{Ty}) T \right] \quad (V-3a)$$

$$\sigma_y = - \frac{E_y}{1-\nu_x \nu_y} \left[ z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\alpha_{Ty} + \nu_x \alpha_{Tx}) T \right] \quad (V-3b)$$

$$\tau_{xy} = - 2z G_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (V-3c)$$

Com auxílio de (II-10), (II-11) e (II-12), chegamos a expressões dos esforços internos por unidade de comprimento:

$$M_x = - D_x \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] - M_{Tx} \quad (V-4a)$$

$$M_y = - D_y \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - M_{Ty} \quad (V-4b)$$

$$M_{xy} = - M_{yx} = + 2D_t \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (V-4c)$$

onde  $D_x$  e  $D_y$  são rigidezes a flexão e  $D_t$  a rigidez torsional. A determinação exata destas rigidezes especialmente a torsional  $D_t$ , é normalmente difícil. Fórmulas aproximadas para calcular rigidez por unidade de comprimento são apresentadas por diversos autores. [SZILARD <sup>20</sup>, TIMOSHENKO <sup>22</sup>, BARÈS <sup>5</sup>].

Os "momentos fletores térmicos equivalentes" são de finidos por:

$$M_{Tx} = \frac{E_x (\alpha_{Tx} + \nu_y \alpha_{Ty})}{1-\nu_x \nu_y} \int_{-t/2}^{t/2} T(x,y,z) z dz \quad (V-5a)$$

$$M_{Ty} = \frac{E_y (\alpha_{Ty} + \nu_x \alpha_{Tx})}{1-\nu_x \nu_y} \int_{-t/2}^{t/2} T(x,y,z) z dz \quad (V-5b)$$

$$V_x = -D_x \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left( \frac{4D_t}{D_x} + \nu_y \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] - \frac{\partial M_{Tx}}{\partial x} \quad (V-10a)$$

$$V_y = -D_y \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left( \frac{4D_t}{D_y} + \nu_x \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] - \frac{\partial M_{Ty}}{\partial y} \quad (V-10b)$$

As expressões obtidas até o momento referem-se a flexão das placas ortotrópicas sujeitas a um campo térmico estacionário geral  $T = T(x, y, z)$ . Tendo em vista o exposto na introdução (ítem 5.1) deste capítulo, passaremos a analisar o caso particular de um campo térmico variável apenas ao longo da expessura da placa, ou seja,  $T = T(z)$ , o que engloba grande parte dos casos de interesse prático.

Assim a equação geral (V-8) se transforma em:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2B \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (V-11)$$

Temos assim uma equação diferencial parcial linear de quarta ordem do tipo elíptico com coeficientes constantes e homogênea, uma vez que  $M_{Tx}$  e  $M_{Ty}$  passam a ser constantes definidas por:

$$M_{Tx} = \frac{E_x (\alpha_{Tx} + \nu_y \alpha_{Ty})}{1 - \nu_x \nu_y} \int_{-t/2}^{t/2} T(z) z dz \quad (V-12a)$$

$$M_{Ty} = \frac{E_y (\alpha_{Ty} + \nu_x \alpha_{Tx})}{1 - \nu_x \nu_y} \int_{-t/2}^{t/2} T(z) z dz \quad (V-12b)$$

A interpretação física da solução da equação homogên

Substituindo as expressões (V-4) na equação diferencial de equilíbrio (II-24), obtemos a seguinte equação para placas ortotrópicas:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2B \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p_z(x,y) - \left( \frac{\partial^2 M_{Tx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{Ty}}{\partial y^2} \right) \quad (V-6)$$

$$\text{onde } B = \frac{1}{2} (v_y D_x + v_x D_y + 4D_t) \quad (V-7)$$

é chamado "rigidez torsional efetiva" da placa ortotrópica.

Se estivermos interessados apenas nos efeitos da atuação do campo térmico  $T(x,y,z)$  basta considerarmos nula a carga externa transversal  $p_z(x,y)$ .

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2B \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \left( \frac{\partial^2 M_{Tx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{Ty}}{\partial y^2} \right) \quad (V-8)$$

Pela substituição das expressões (V-4) em (II-21) e (II-22), encontraremos as forças cortantes por unidade de comprimento.

$$Q_x = - \frac{\partial}{\partial x} \left( D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial M_{Tx}}{\partial x} \quad (V-9a)$$

$$Q_y = - \frac{\partial}{\partial y} \left( D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial M_{Ty}}{\partial y} \quad (V-9b)$$

De forma semelhante, as forças verticais por unidade de comprimento de bordo, se escrevem:



nea (V-11) é a obtenção da flecha da placa  $w(x,y)$  somente sob a ação de "forças" (momentos e força cortante) de bordo. Consequentemente a solução satisfará as condições de bordo prescritas e manterá o equilíbrio com as "forças" externas de contorno.

### 5.3. Condições de Contorno

Analisaremos as mesmas condições de contorno descritas no capítulo II, introduzindo as novas expressões para os esforços, considerando ainda o campo térmico particularizado  $T = T(z)$ , e conseqüentemente constantes os "momentos fletores térmicos equivalentes"  $M_{Tx}$  e  $M_{Ty}$ .

#### 5.3.1. Bordo Engastado

Temos  $w = 0$  e  $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ . Portanto a todo ponto imediatamente vizinho ao bordo engastado corresponderá um outro virtual externo de mesma flecha.

#### 5.3.2. Bordo Simplesmente Apoiado

$$\text{Bordo } x = \text{Cte: } \left\{ \begin{array}{l} w = 0 \\ M_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \frac{M_{Tx}}{D_x} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(V-13a)} \\ \text{(V-13b)} \end{array}$$

$$\text{Bordo } y = \text{Cte: } \left\{ \begin{array}{l} w = 0 \\ M_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \frac{M_{Ty}}{D_y} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(V-13c)} \\ \text{(V-13d)} \end{array}$$

Usando diferenças finitas centrais e tomando por base a fig. (II-12a e b), escrevemos respectivamente:

Bordo  $y = \text{Cte}$

$$w_i = w_\ell = w_r = 0 ; w_b = -w_a - \frac{k}{D_y} M_{Ty} \quad \text{(V-13e)}$$

Bordo  $x = \text{Cte}$

$$w_a = w_i = w_b = 0 ; w_r = -w_\ell - \frac{\alpha k}{D_x} M_{Tx} \quad \text{(V-13f)}$$

### 5.3.3. Bordo Livre

$$\text{Bordo } x = \text{Cte: } \left\{ \begin{array}{l} M_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \frac{M_{Tx}}{D_x} \end{array} \right. \quad \text{(V-14a)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left( \frac{4D_t}{D_x} + \nu_y \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \end{array} \right. \quad \text{(V-14b)}$$

$$\text{Bordo } y = \text{Cte: } \left\{ \begin{array}{l} M_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \frac{M_{Ty}}{D_y} \\ V_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left( \frac{4D_t}{D_y} + \nu_x \right) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(V-14c)} \\ \text{(V-14d)} \end{array}$$

Conforme a fig. (II-13a), escrevemos segundo a condição (V-14c):

$$w_b = 2\left(1 + \frac{v_x}{2}\right) w_i - w_a - \frac{v_x}{2} (w_{\ell} + w_r) - \frac{k^2}{D_y} M_{Ty} \quad (V-15a)$$

$$w_{b\ell} = 2\left(1 + \frac{v_x}{2}\right) w_{\ell} - w_{a\ell} - \frac{v_x}{2} (w_{\ell\ell} + w_i) - \frac{k^2}{D_y} M_{Ty} \quad (V-15b)$$

$$w_{br} = 2\left(1 + \frac{v_x}{2}\right) w_r - w_{ar} - \frac{v_x}{2} (w_i + w_{rr}) - \frac{k^2}{D_y} M_{Ty} \quad (V-15c)$$

Com auxílio das expressões (V-15a,b,c) juntamente com a condição (V-14d), escrevemos:

$$w_{bb} = \left[4(1+A) + \frac{v_x}{2}(4+6A)\right] w_i - 4(1+A) w_a - 2\left[A + \frac{v_x}{2}(1+2A)\right] (w_{\ell} + w_r) + 2A (w_{a\ell} + w_{ar}) + A \frac{v_x}{2} (w_{\ell\ell} + w_{rr}) + w_{aa} - \frac{2k^2}{D_y} M_{Ty} \quad (V-15d)$$

$$\text{Onde } A = \left[ \frac{v_x}{2} + \frac{4D_t}{D_y} \right] \frac{1}{\alpha} \quad (V-15e)$$

Em isotropia, teríamos:  $D_y = D$ ;  $v_x = v$ ;  $D_t = \left(\frac{1-v}{2}\right) D$

Assim  $A = (2-v)/\alpha^2$ .

Procedendo de forma análoga com relação à figura (II-13b), obtemos:

$$w_r = 2(1+v_y \alpha^2) w_i - w_{\ell} - \alpha^2 v_y (w_a + w_b) - \frac{\alpha^2 k^2}{D_x} M_{Tx} \quad (V-16a)$$

$$w_{ar} = 2(1+v_y \alpha^2) w_a - w_{a\ell} - \alpha^2 v_y (w_{aa} + w_i) - \frac{\alpha^2 k^2}{D_x} M_{Tx} \quad (V-16b)$$

$$w_{br} = 2(1+\nu\alpha^2)w_b - w_{bl} - \alpha^2\nu_y(w_i + w_{bb}) - \frac{\alpha^2 k^2}{D_x} M_{Tx} \quad (V-16c)$$

$$w_{rr} = w_{ll} + C\alpha^2\nu_y(w_{aa} + w_{bb}) + 2C(w_{al} + w_{bl}) - 4(1+C)w_l + \\ - \left[ 2C(1+2\alpha^2\nu_y) + 2\alpha^2\nu_y \right] (w_a + w_b) + \left[ 4(1+C) + 2\alpha^2\nu_y(2+3C) \right] w_i - \frac{2\alpha^2 k^2}{D_x} M_{Tx} \quad (V-16d)$$

$$\text{Onde } C = \left[ \nu_y + \frac{4D_t}{D_x} \right] \alpha^2 \quad (V-16e)$$

$$\text{Em isotropia } C = \alpha^2(2-\nu)$$

#### 5.4. Aplicações (placas retangulares)

O método de solução a ser empregado será o mesmo utilizado nos capítulos anteriores. Primeiramente escreveremos a equação (V-11) em diferenças finitas centrais, baseando-nos na malha retangular da figura (II-9).

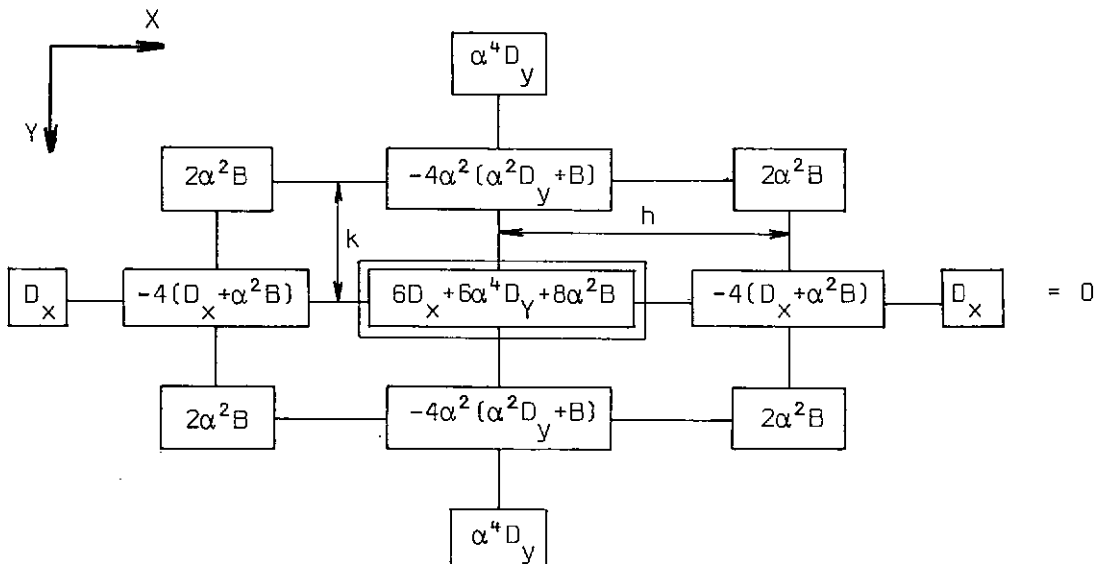
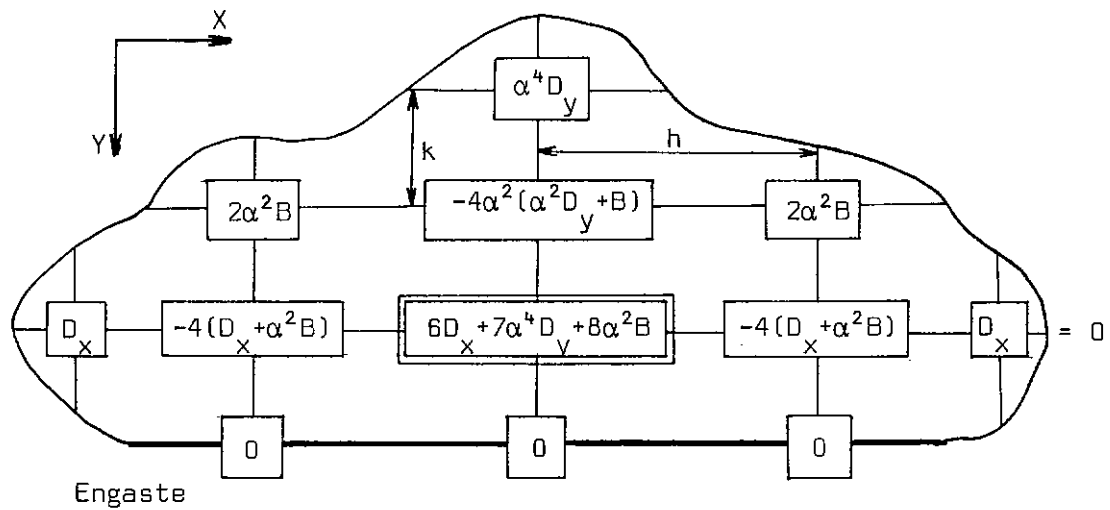


FIGURA V-1 - Equação V-11 em diferenças finitas centrais:  $\alpha = h/k$

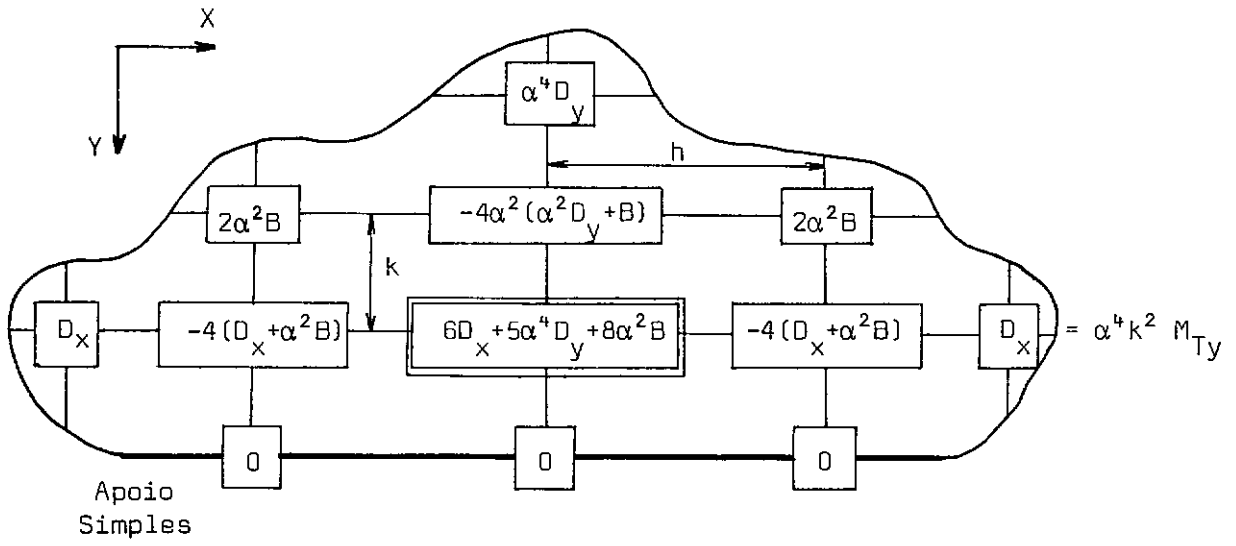


FIGURA V-4 - Bordo Engastado  $\alpha = h/k$ 

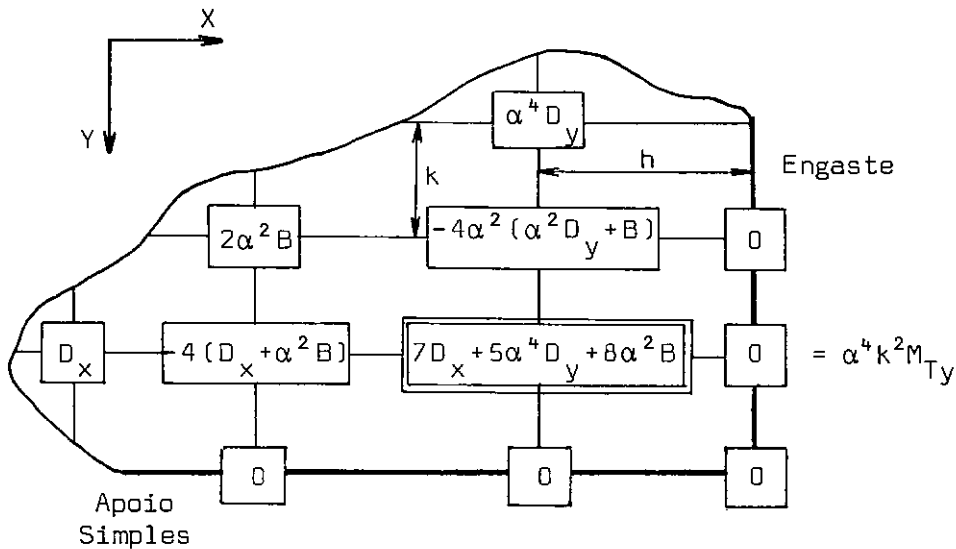
Tendo em vista os resultados anteriores e a interpretação física do final do item 5.2, concluímos que se uma placa retangular ortotrópica ou isotrópica estiver totalmente engastada no contorno, as flechas serão nulas. Portanto a ação de um campo térmico variável apenas ao longo da espessura não acarretará o surgimento de esforços cortantes, mas apenas movimentos fletores constantes dados por:  $M_x = M_{Tx}$  e  $M_y = M_{Ty}$ . As tensões serão também constantes, utilizando-se as expressões (V-3):

$$\sigma_x = - \frac{E_x (\alpha_{Tx} + \nu \alpha_{Ty})}{1 - \nu_x \nu_y} T \quad ; \quad \sigma_y = - \frac{E_y (\alpha_{Ty} + \nu_x \alpha_{Tx})}{1 - \nu_x \nu_y} T$$



FIGURA V-7 - Bordo Simplesmente Apoiado  $\alpha = h/k$ 

#### 5.4.3. Bordo Engastado e Bordo Simplesmente Apoiado

FIGURA V-8 - Bordo Engastado e Simplesmente Apoiado  $\alpha = h/k$



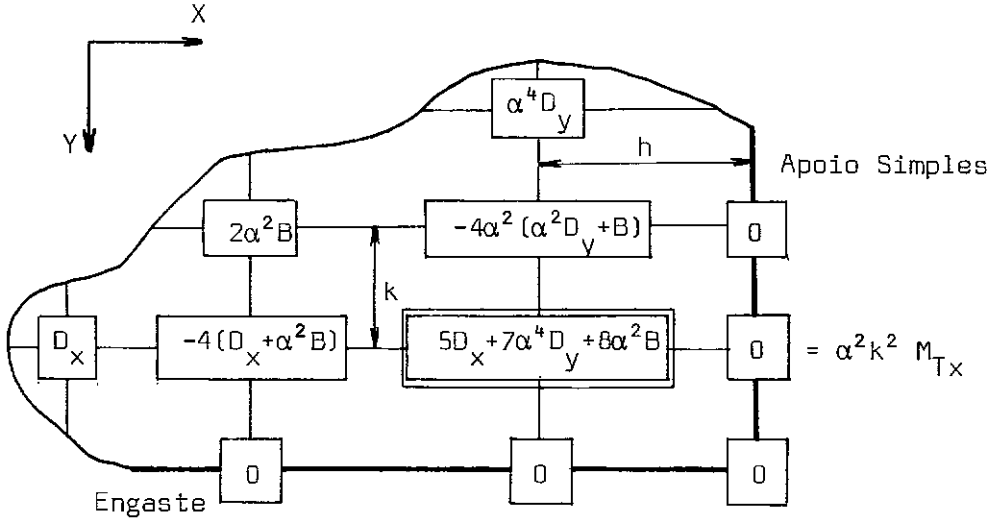


FIGURA V-9 - Bordo Engastado e Simplesmente Apoiado  $\alpha = h/k$

#### 5.4.4. Bordo Livre

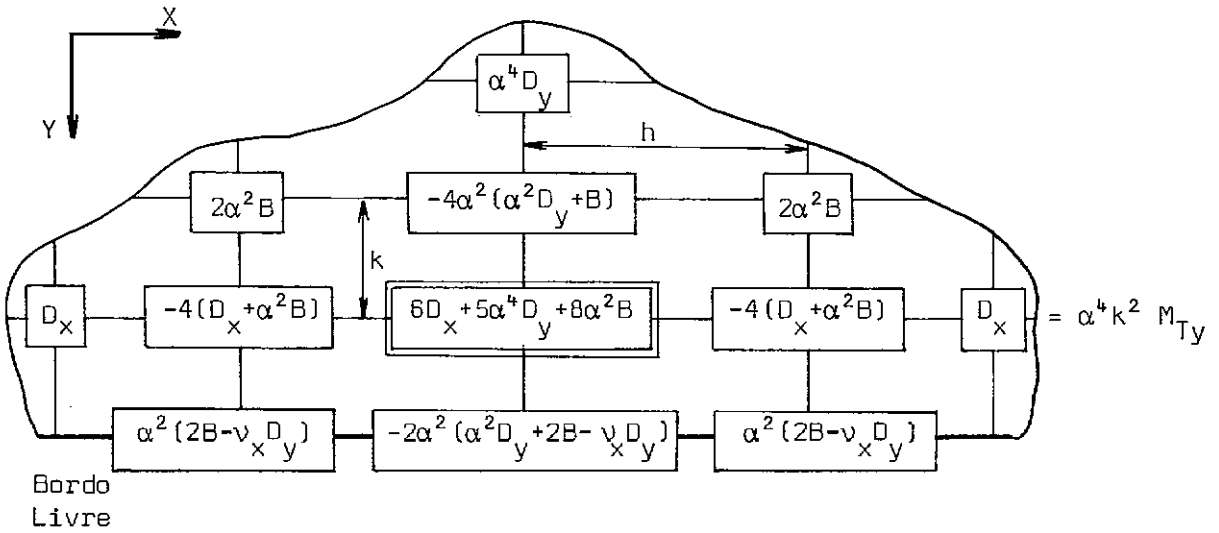
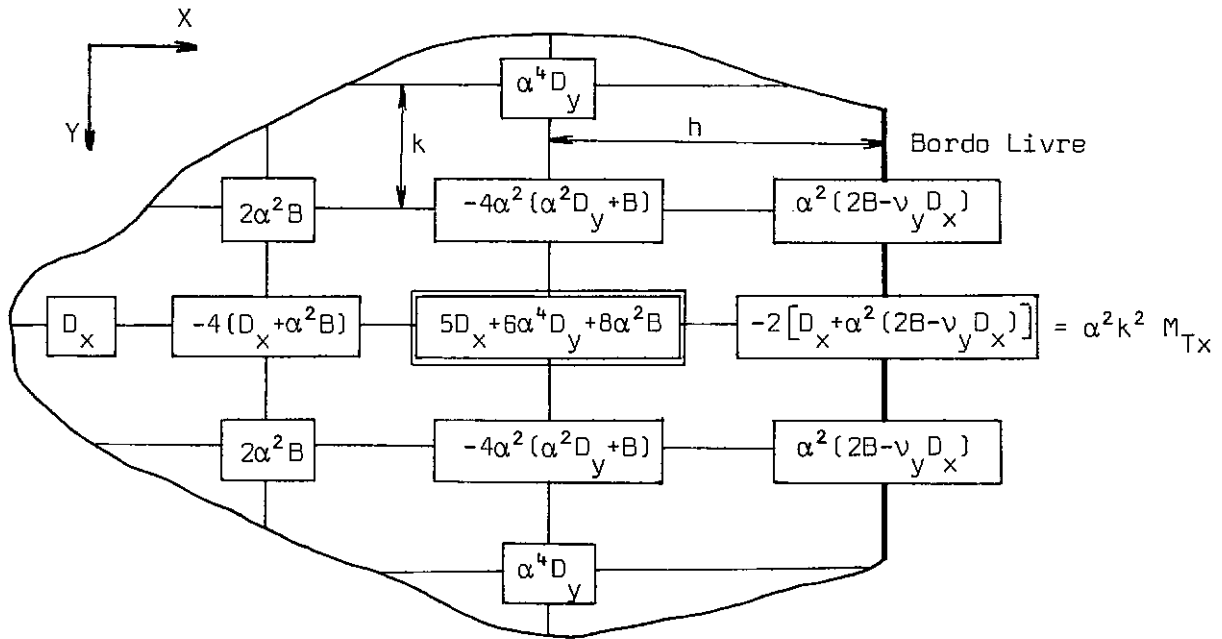
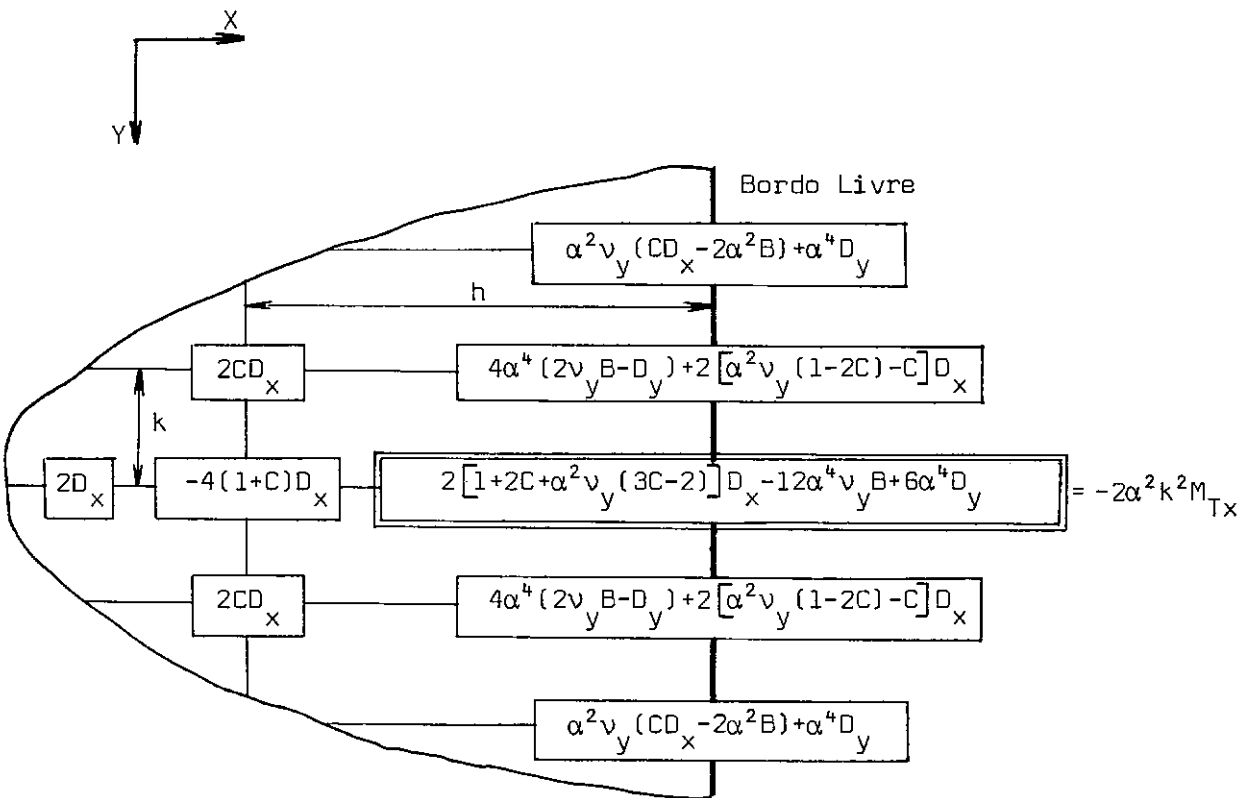


FIGURA V-10 - Bordo Livre  $\alpha = h/k$

FIGURA V-11 - Bordo Livre  $\alpha = h/k$ FIGURA V-12 - Bordo Livre  $\alpha = h/k$ ;  $C = (4D_t/D_x + v_y)\alpha^2$

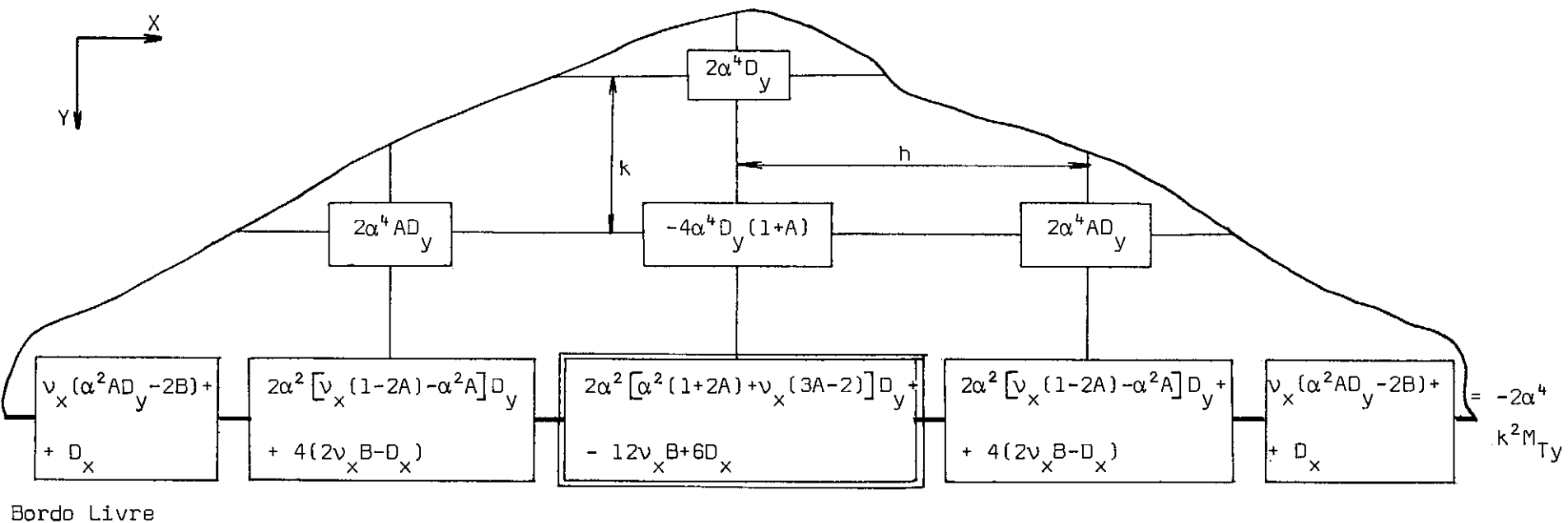
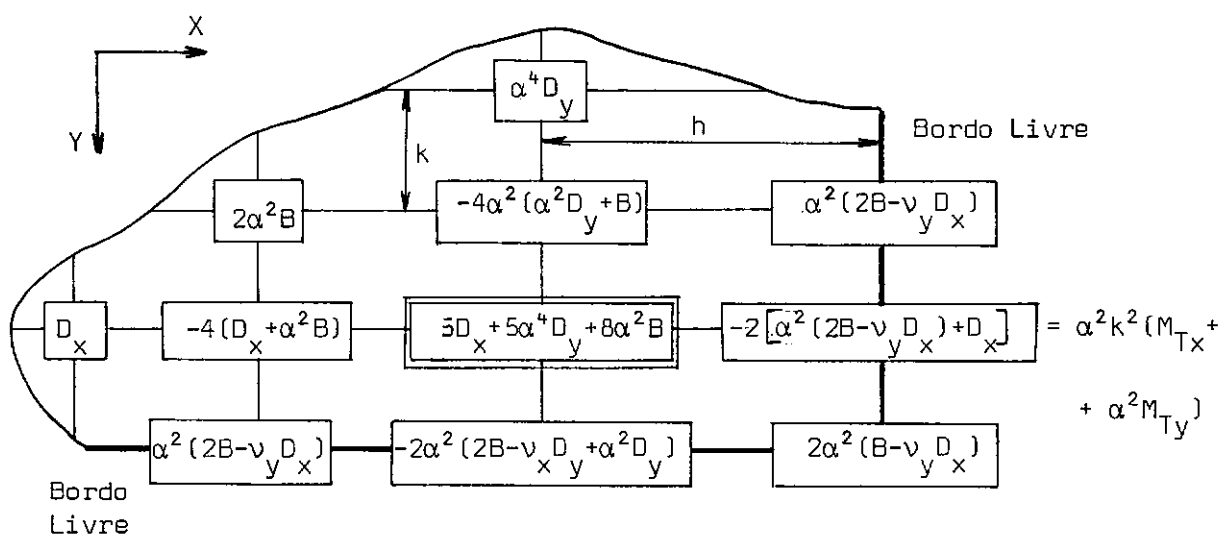
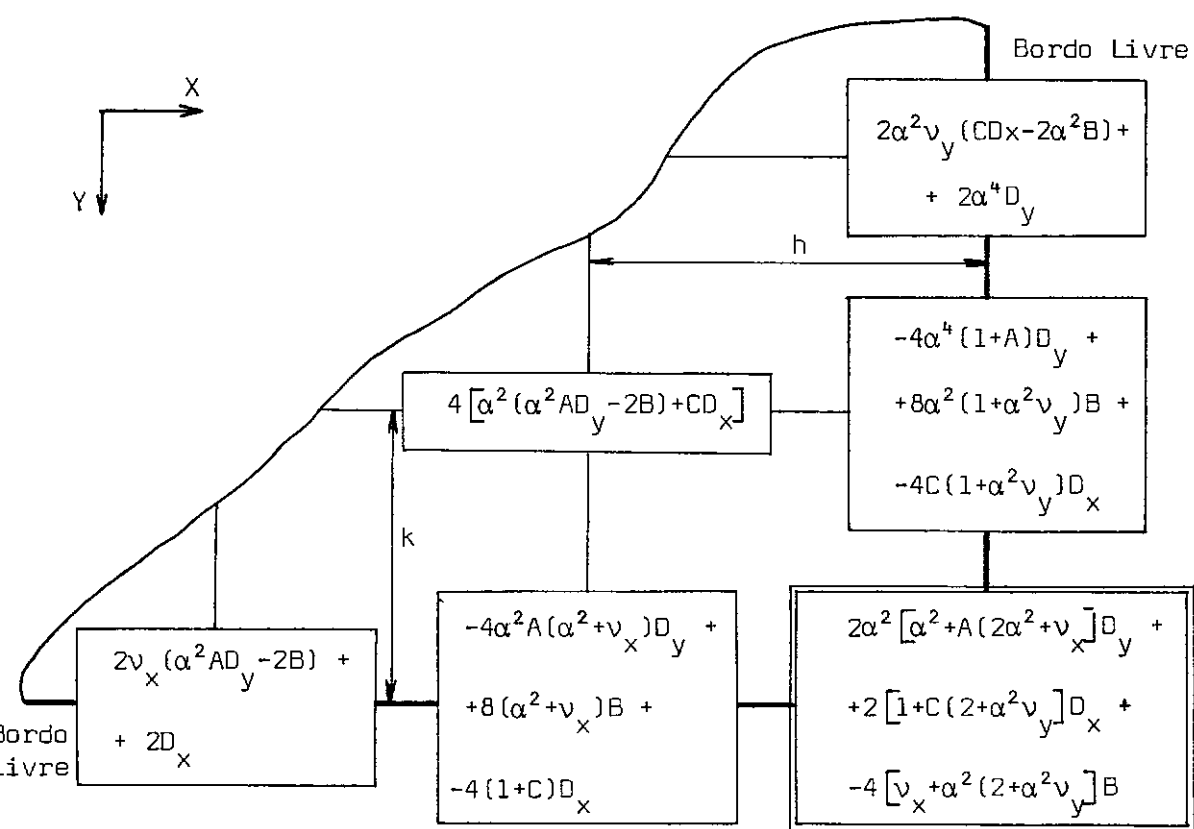


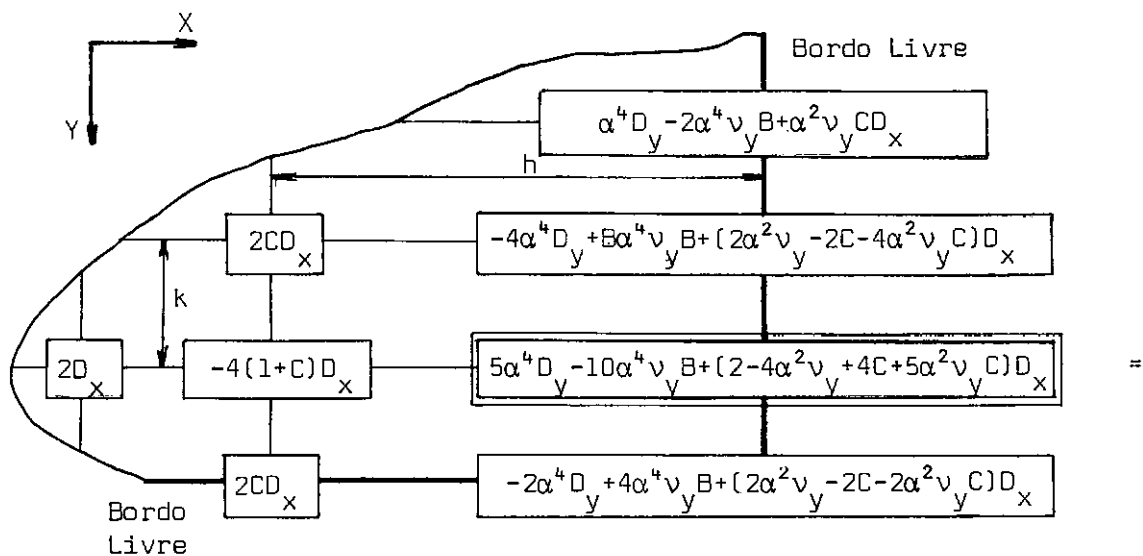
FIGURA V-13 - Bordo Livre  $\alpha = h/k$ ;  $A = (4D_t/D_y + v_x) / \alpha^2$

FIGURA V-14 - Bordo Livre  $\alpha = h/k$ 

$$= \left[ 2\alpha^2(v_x v_y C - 1)D_x + 2\alpha^4 v_x (1 - A)D_y + 4\alpha^2 v_x (1 - \alpha^2 v_y)B \right] \frac{k^2 M_{Tx}}{D_x (1 - v_x v_y)} +$$

$$+ \left[ 2\alpha^4 (v_x v_y A - 1)D_y + 2\alpha^2 v_y (1 - C)D_x + 4\alpha^2 v_y (\alpha^2 - v_x)B \right] \frac{k^2 M_{Ty}}{D_y (1 - v_x v_y)}$$

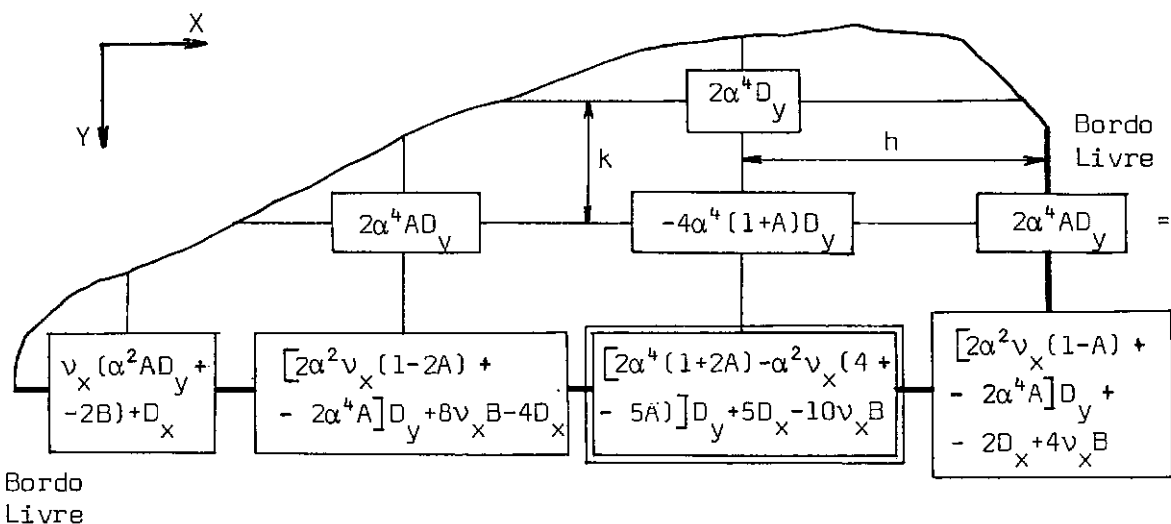
FIGURA V-15 - Bordo Livre:  $C = (4D_t/D_x + v_y)\alpha^2$ ;  $A = (4D_t/D_y + v_x)/\alpha^2$ ;  $\alpha = h/k$



$$= (\alpha^4 D_y - 2\alpha^4 v_y B + \alpha^2 v_y C D_x) \frac{k^2}{D_y} \left( \frac{M_{Ty}}{1 - v_x v_y} \right) +$$

$$+ \left[ \frac{2\alpha^4 B - \alpha^2 C D_x - \alpha^4 v_x D_y}{1 - v_x v_y} + \alpha^2 C D_x - 2\alpha^4 B - 2\alpha^2 D_x \right] \frac{k^2}{D_x} M_{Tx}$$

FIGURA V-16 - Bordo Livre:  $C = (4D_t/D_x + v_y)\alpha^2$ ;  $\alpha = h/k$



$$= [(2\alpha^2 B - \alpha^4 A D_y - \alpha^2 v_y D_x) / (1 - v_x v_y) + \alpha^4 A D_y - 2\alpha^2 B - 2\alpha^4 D_y] k^2 M_{Ty} / D_y +$$

$$+ (\alpha^2 D_x - 2\alpha^2 v_x B + \alpha^4 v_x A D_y) k^2 M_{Tx} / D_x (1 - v_x v_y)$$

FIGURA V-17 - Bordo Livre  $\alpha = h/k$ ;  $A = (4D_t/D_y + v_x)/\alpha^2$

### 5.4.5. Bordo Engastado e Bordo Livre

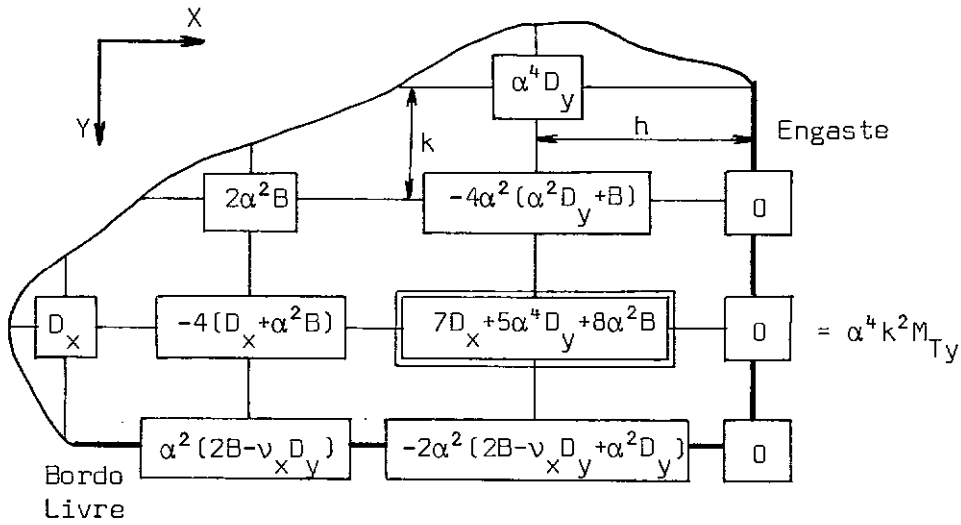


FIGURA V-18 - Bordo Engastado e Livre:  $\alpha = h/k$

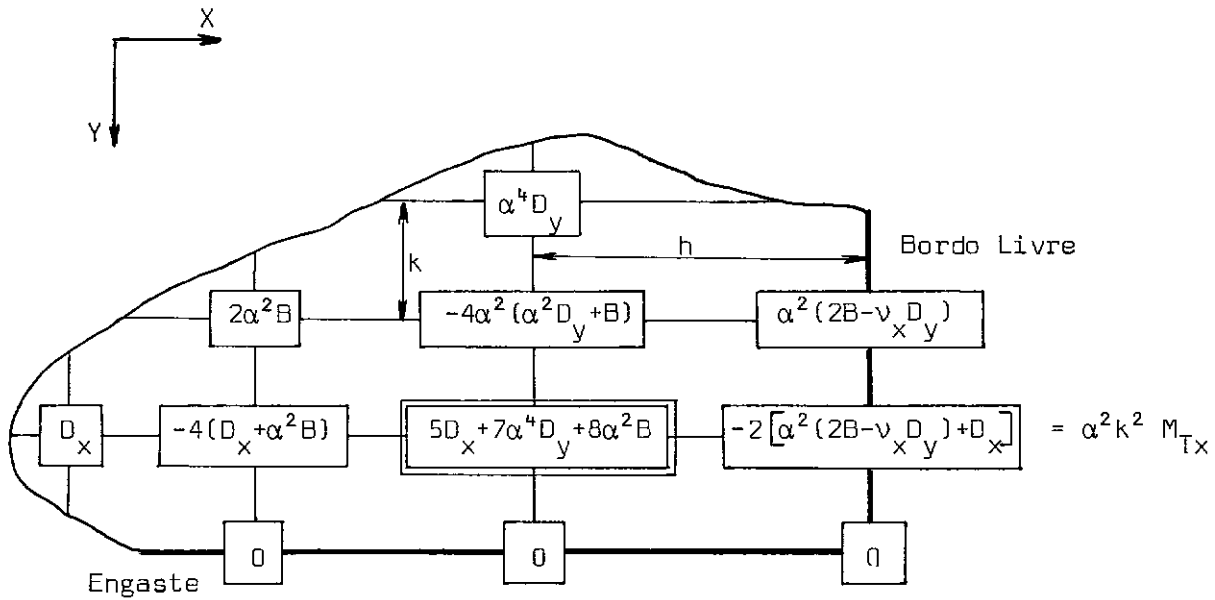


FIGURA V-19 - Bordo Engastado e Livre:  $\alpha = h/k$

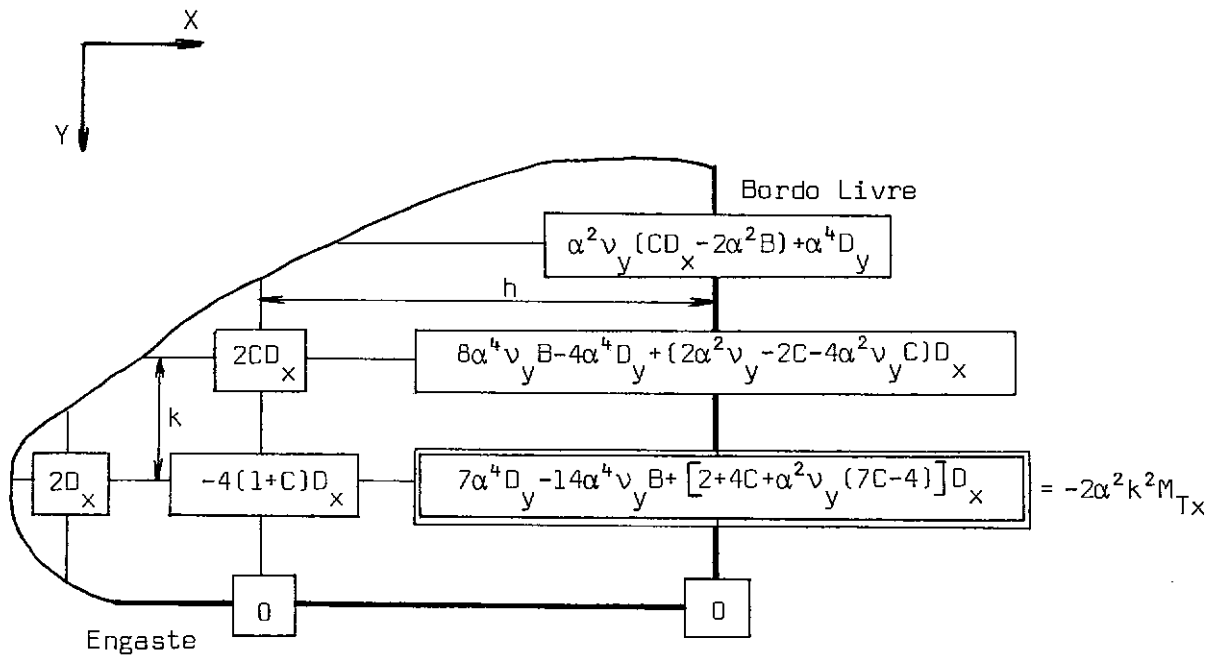


FIGURA V-20 - Bordo Engastado e Livre:  $\alpha = h/k$ ;  $C = \left(\frac{4D_T}{D_x} + v_y\right)\alpha^2$

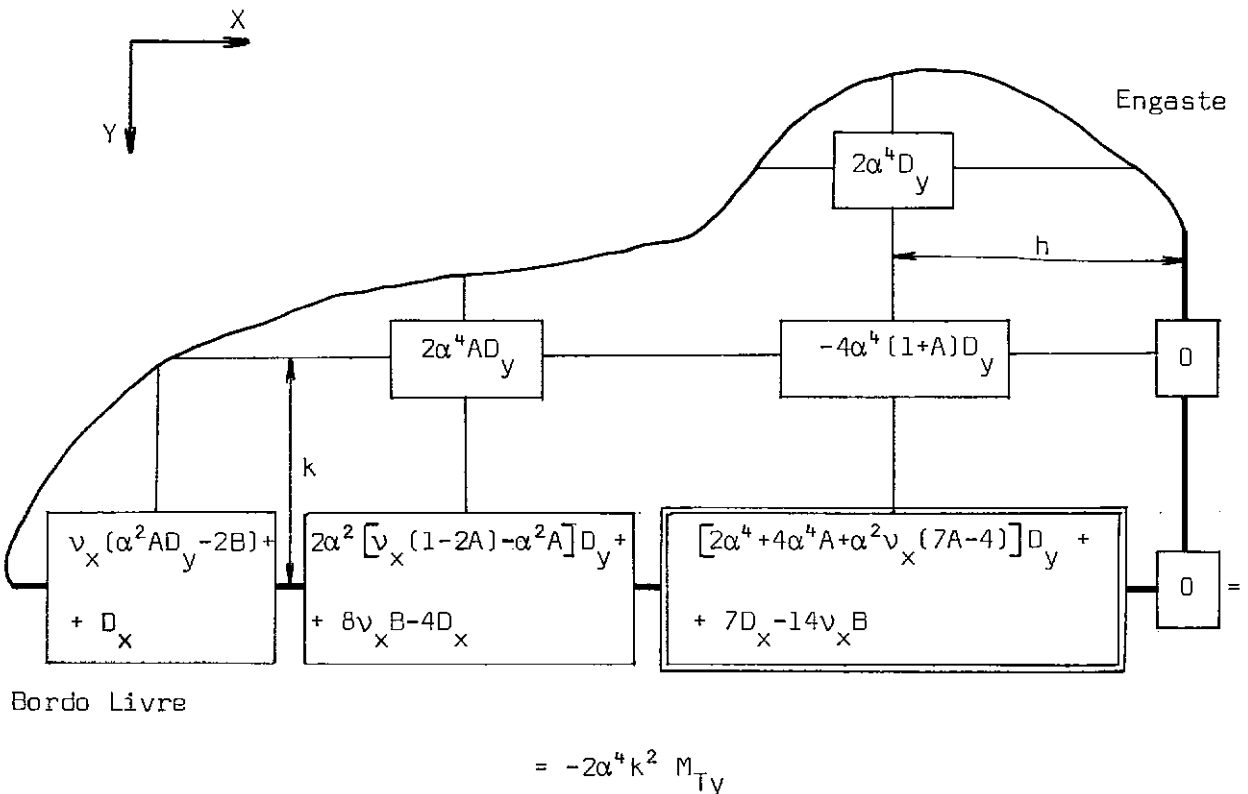


FIGURA V-21 - Bordo Engastado e Livre:  $A = (4D_t/D_y + v_x)/\alpha^2$ ;  $\alpha = h/k$

### 5.4.6. Bordo Simplesmente Apoiado e Bordo Livre

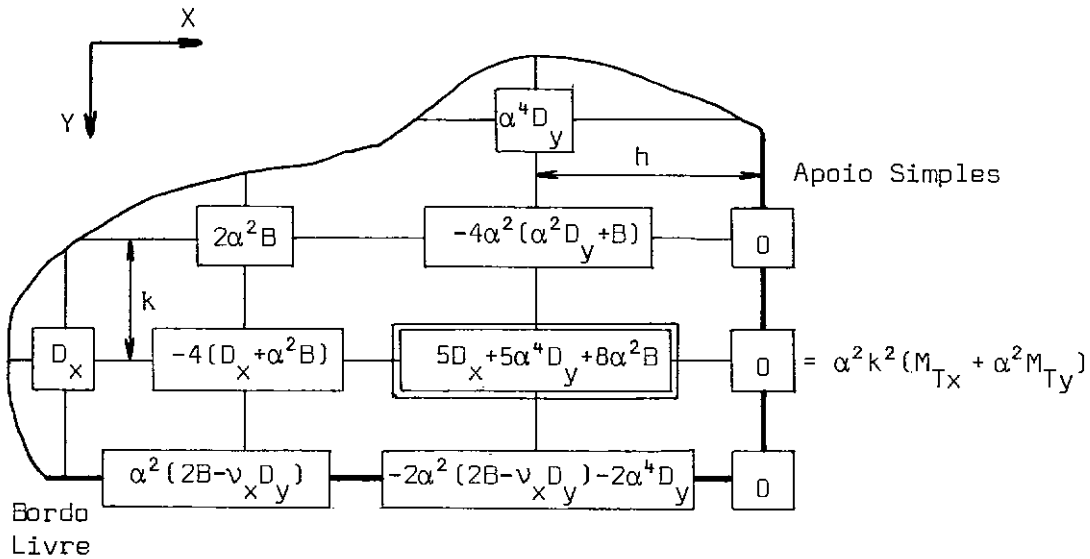


FIGURA V-22 - Bordo Simplesmente Apoiado e Livre:  $\alpha = h/k$

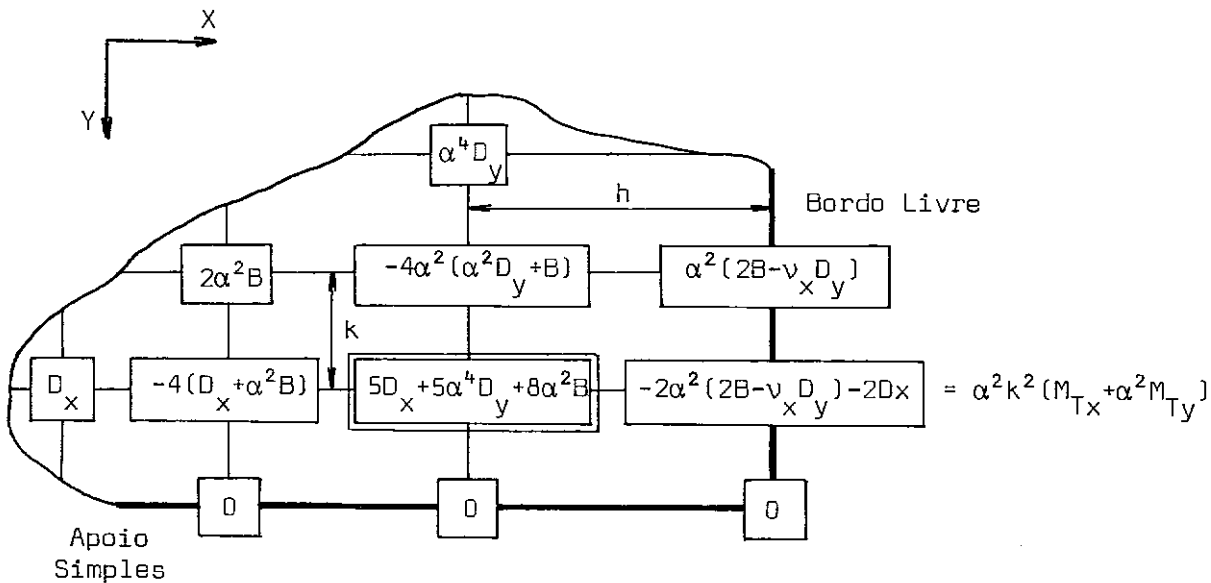
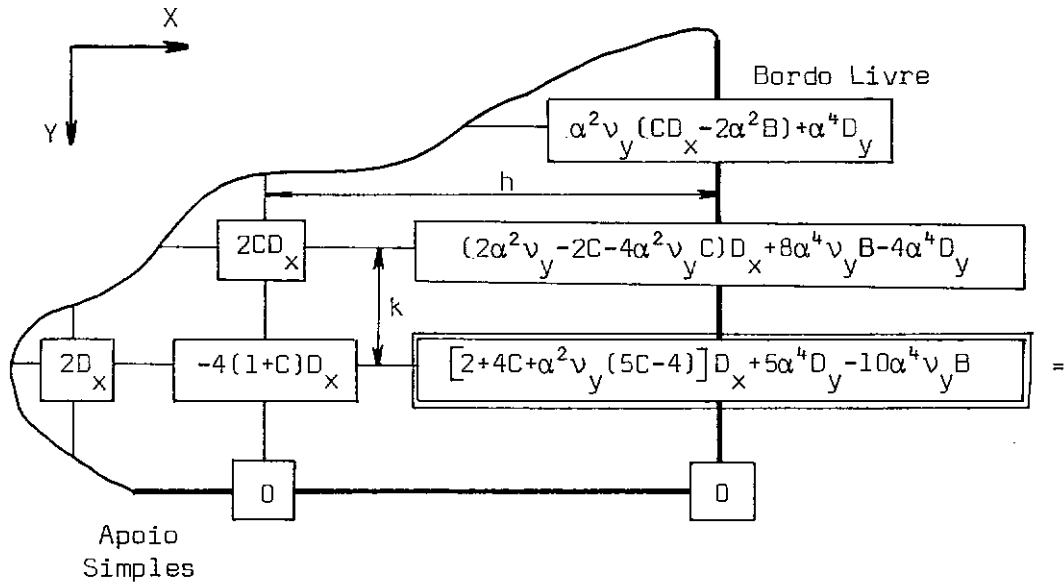


FIGURA V-23 - Bordo Simplesmente Apoiado e Livre  $\alpha = h/k$

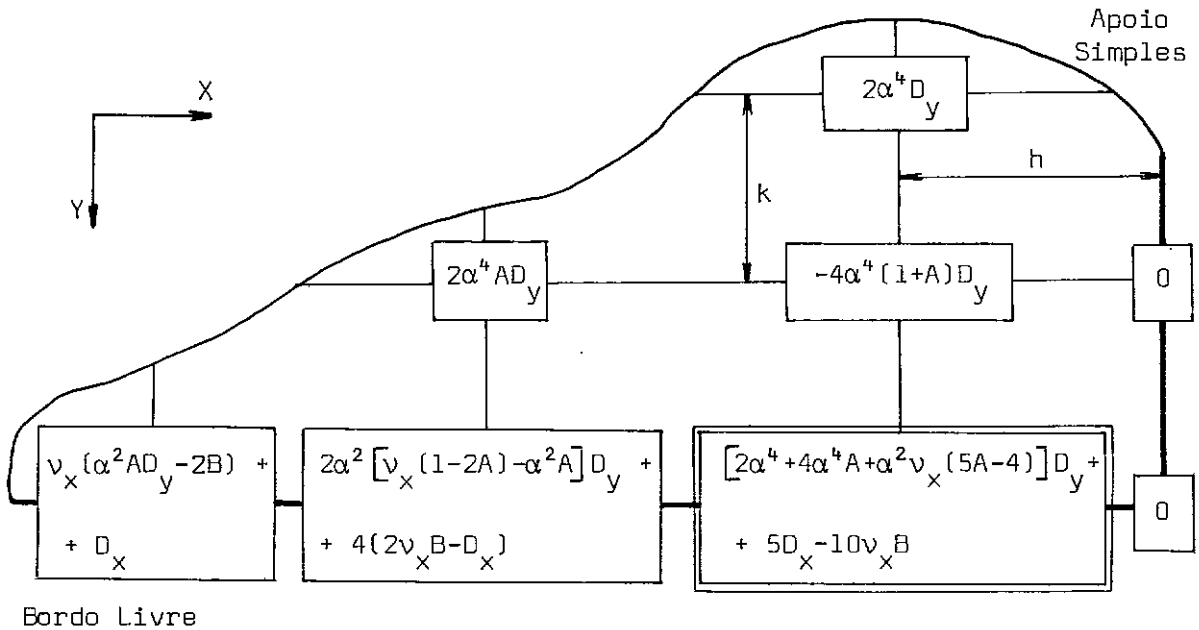




$$= (\alpha^4 D_y - 2\alpha^4 v_y B + \alpha^2 v_y C D_x) k^2 M_{Ty} / D_y (1 - v_x v_y) +$$

$$+ \left[ (2\alpha^4 B - \alpha^2 C D_x - \alpha^4 v_x D_y) / (1 - v_x v_y) + \alpha^2 C D_x - 2\alpha^4 B - 2\alpha^2 D_x \right] k^2 M_{Tx} / D_x (1 - v_x v_y)$$

FIGURA V-24 - Bordo Simplesmente Apoiado e Livre:  $C = (4D_t/D_x + v_y) \alpha^2$ ;  $\alpha = h/k$



$$= \left[ (2\alpha^2 B - \alpha^4 A v_x v_y D_y - \alpha^2 v_y D_x) / (1 - v_x v_y) - 2\alpha^2 B - 2\alpha^4 D_y \right] k^2 M_{Ty} / D_y +$$

$$+ \left[ (\alpha^2 D_x - 2\alpha^2 v_x B + \alpha^4 v_x A D_y) / (1 - v_x v_y) \right] k^2 M_{Tx} / D_x$$

FIGURA V-25 - Bordo Simplesmente Apoiado e Livre:  $\alpha = h/k$ ;  $A = (4D_t/D_y + v_x) / \alpha^2$

### 5.5. Obtenção dos Esforços

Com procedimentos análogos aos do ítem 2.6. passamos à determinação dos esforços num ponto genérico "i" da malha, através das expressões esquematizadas a seguir.

$$(M_x)_i \approx -\frac{D_x}{h^2} \left[ \begin{array}{c} \alpha^2 v_y \\ \boxed{1} \text{---} \boxed{-2(1+\alpha^2 v_y)} \text{---} \boxed{1} \\ \alpha^2 v_y \end{array} \right] \{w\} - M_{Tx}$$

$$(M_y)_i \approx -\frac{D_y}{h^2} \left[ \begin{array}{c} \alpha^2 \\ v_x \text{---} \boxed{-2(\alpha^2 + v_x)} \text{---} v_x \\ \alpha^2 \end{array} \right] \{w\} - M_{Ty}$$

$$(M_{xy})_i \approx \frac{D_t}{2\alpha k^2} \left[ \begin{array}{cc} \boxed{1} & \boxed{-1} \\ \boxed{-1} & \boxed{1} \end{array} \right] \{w\}$$



$$\{Q_y\}_i \approx -\frac{1}{2kh^2} \left[ \begin{array}{c} \boxed{-\alpha^2 D_y} \\ \boxed{-B} \text{ --- } \boxed{2(\alpha^2 D_y + B)} \text{ --- } \boxed{-B} \\ | \qquad \qquad \qquad | \\ \text{---} \boxed{0} \text{ ---} \\ | \qquad \qquad \qquad | \\ \boxed{B} \text{ --- } \boxed{-2(\alpha^2 D_y + B)} \text{ --- } \boxed{B} \\ \boxed{\alpha^2 D_y} \end{array} \right] \{w\}$$

Nas expressões anteriores o ponto nodal genérico "i", onde se deseja calcular os esforços internos é representado pelos dois retângulos concêntricos.

## CAPÍTULO VI

### EXEMPLOS E ANÁLISE DOS RESULTADOS

#### 6.1. Considerações Gerais

Neste capítulo apresentaremos alguns exemplos das placas estudadas, acompanhados das respectivas análises e observações referentes aos resultados, utilizando-se as aplicações listadas anteriormente.

Para solução dos sistemas de equações lineares simultâneas resultantes faremos uso da subrotina LEQT2F/IMSL implantada no sistema BURROUGHS B-6700 do N.C.E./U.F.R.J.

#### 6.2. Placas analisadas

Entre as placas retangulares e circulares foram escolhidos sete exemplos, variando-se as condições de contorno e a natureza do campo térmico atuante.

Para verificar a convergência face à solução analítica compararemos as flechas, momentos flettores e torsões no centro da placa. Entretanto, em alguns casos a solução analítica disponível não é adequada à obtenção dos esforços. No caso particular de setor circular com bordos opostos engastados e simplesmente apoiados não se dispunha de solução analítica.

Prosseguiremos analisando cada exemplo separadamente.

### 6.2.1. Placa Retangular Simplesmente Apoiada: $T = T(z)$

Supondo a atuação de um campo térmico  $T = T(z)$ , variável apenas com a espessura, consideramos a placa dividida segundo as malhas quadradas ( $\alpha = 1$ ) das figuras (IV-1 a e b). Devido a simetria utilizou-se apenas 1/4 de placa. Empregando-se a equação geral da fig. (II-10) e as "moléculas" das figuras (II-18, 19 e 20), chegou-se a sistemas de equações de ordem  $18 \times 18$  e  $32 \times 32$ , respectivamente. Ressaltamos ainda as seguintes simplificações:  $p_z^*(x,y) = 0$  e  $M_T(x,y) = M_T$  (Constante).

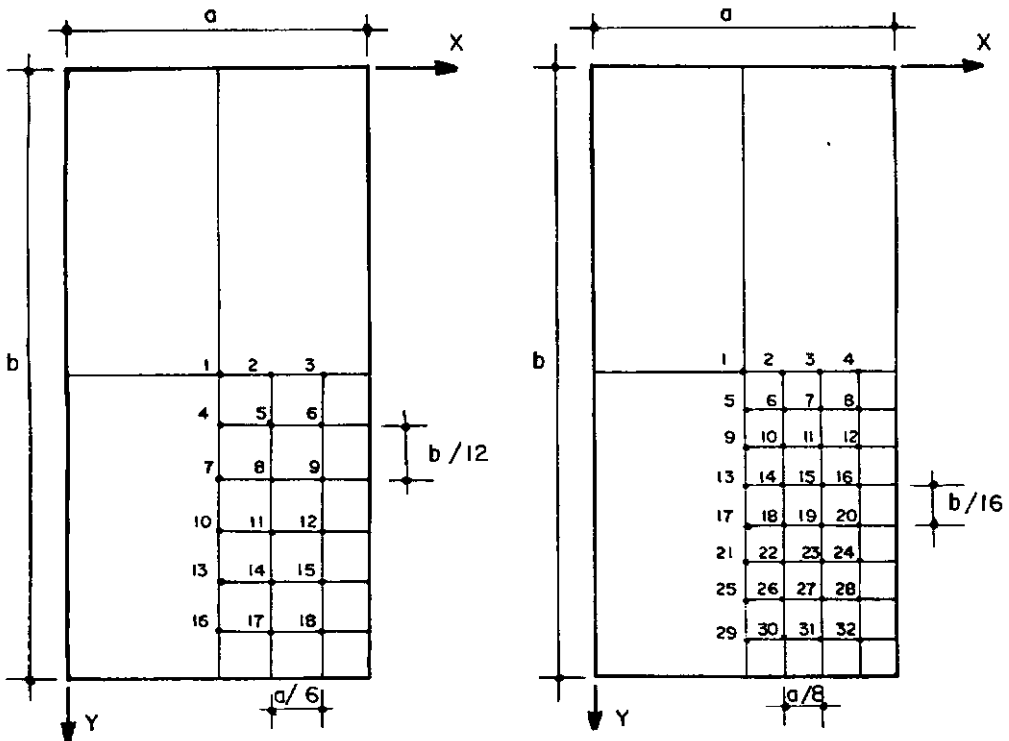


Figura (VI-1) - Placa Simplesmente Apoiada :  $b = 2a$ ,  $\nu = 0,2$

Como solução analítica dispomos das seguintes expressões:

$$w(x,y) = \frac{16M_T}{D\pi^4} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)}{mn \left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]} \quad (\text{VI-1})$$

Correspondente à solução (12.5.4) BOLEY <sup>[7]</sup> ou  
(IX. 2-14) NOWACKI <sup>[15]</sup>

Esta expressão torna-se pobremente convergente para cálculo dos esforços. Uma solução alternativa mais conveniente para cálculo dos esforços é apresentada segundo o método de Levy em BOLEY <sup>[7]</sup>

$$w(x,y) = \frac{4M_T}{D\pi} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\beta_m^2} \left[ 1 - \frac{\cosh(\beta_m y')}{\cosh(\beta_m b/2)} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (\text{VI-2})$$

onde  $\beta_m = m\pi/a$  ;  $y' = y - (b/2)$

As expressões para os esforços são obtidas pela substituição de (IV-1) ou preferencialmente (VI-2) em (II-13, 14 e 15), obtendo-se as soluções (12.5.24a) BOLEY <sup>[7]</sup>.

Apresentamos a seguir os resultados obtidos para o ponto central da placa, assim como o erro relativo respectivo.

	Solução Analítica	Solução Numérica		Erro	
		18 x 18	32 x 32	Relativo %	
$W_1$	$0.1139M_T a^2/D$	$0.1131M_T a^2/D$	$0.1134M_T a^2/D$	0.69	0.44
$M_{x1}$	$-0.1098M_T(1-\nu)$	$-0.1148M_T(1-\nu)$	$-0.1126M_T(1-\nu)$	4.55	2.55
$M_{y1}$	$-0.8979M_T(1-\nu)$	$-0.8852M_T(1-\nu)$	$-0.8874M_T(1-\nu)$	1.41	1.17
$M_{xy1}$	0	0	0	0	0

Consideramos estes resultados aceitáveis face aos objetivos da prática, ressaltando a facilidade e simplicidade na sua obtenção. Observamos ainda que a partir de uma certa largura da malha a convergência se torna lenta.

#### 6.2.2. Placa Quadrada Simplesmente Apoiada: $T = T(x,y,z)$

Consideraremos a atuação de um campo térmico variável também com as coordenadas do ponto, ou seja:

$$T = T(x,y,z) = \left[ \frac{(T_1 - T_2)}{t} z + \frac{T_1 + T_2}{2} \right] \left[ 1 - \left( \frac{x-a}{a} \right)^2 \right] \left[ 1 - \left( \frac{y-b}{b} \right)^2 \right] \quad (VI-3)$$

Onde  $T_1$  e  $T_2$  são as temperaturas no centro da placa, respectivamente em suas faces inferior e superior.



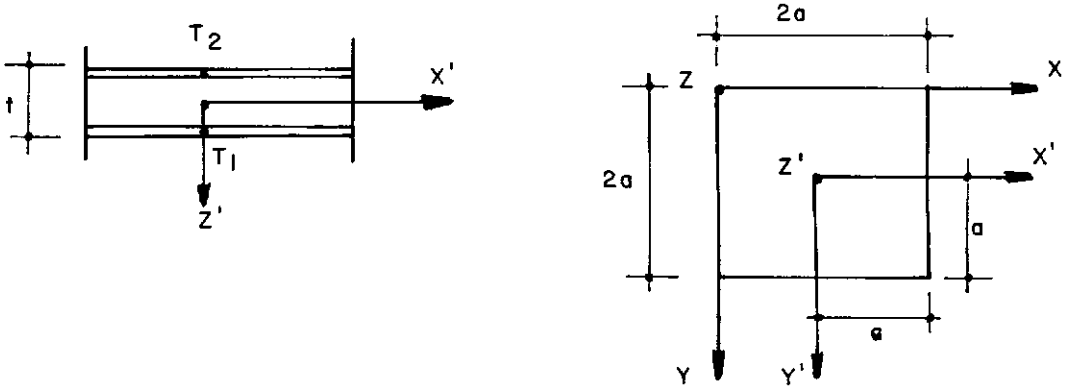


Figura (VI-2) - Placa quadrada Simplesmente Apoiada

Levando (VI-3) em (II-17), escrevemos:

$$M_T(x, y) = \frac{\alpha_T E (T_1 - T_2) t^2}{12(1 - \nu)} \left[ 1 - \left( \frac{x-a}{a} \right)^2 \right] \left[ 1 - \left( \frac{y-b}{b} \right)^2 \right] \quad (\text{IV-4})$$

$$p_z^*(x, y) = - \nabla^2 M_T = - \frac{\alpha_T E (T_1 - T_2) t^2}{6(1 - \nu) a^2 b^2} \left[ x^2 - 2ax + y^2 - 2by \right] \quad (\text{VI-5})$$

Como estamos analisando uma placa quadrada ( $b = a$ ), o carregamento fictício por unidade de área passa a ser escrito por:

$$p_z^*(x, y) = - \frac{\alpha_T E (T_1 - T_2) t^2}{6(1 - \nu) a^4} \left[ x^2 + y^2 - 2a(x + y) \right] \quad (\text{VI-6})$$

Foram usadas na análise numérica as seguintes malhas tendo em vista a simetria apresentada:

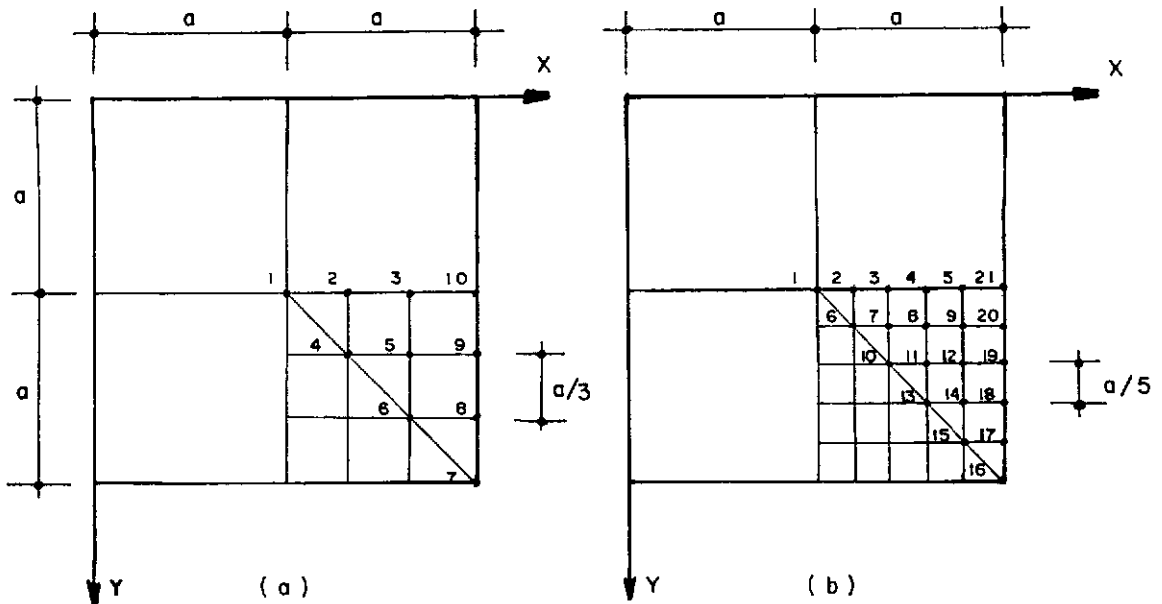


Figura (VI-3) - Malha quadrada:  $\alpha = 1.0$

Com auxílio da equação geral da fig. (II-10) e expressão (II-47) e tendo em vista a malha da fig. (VI-3a), montamos o sistema de equações:

$$\frac{81D}{a^4} \left[ 20w_1 - 32w_2 + 8w_4 + 4w_3 \right] = \frac{1}{36} \left[ 16p_1^* + 16p_2^* + 4p_4^* \right]$$

$$\frac{81D}{a^4} \left[ 25w_2 - 16w_4 - 8w_3 - 8w_1 + 6w_5 \right] = \frac{1}{36} \left[ 16p_2^* + 4(p_1^* + p_3^*) + 8p_4^* + 2(p_2^* + p_5^*) \right]$$

$$\frac{81D}{a^4} \left[ 19w_3 - 16w_5 - 8w_2 + 4w_4 + 2w_6 + w_1 \right] = \frac{1}{36} \left[ 16p_3^* + 8p_5^* + 4(p_2^* + p_{10}^*) + 2(p_4^* + p_9^*) \right]$$

$$\frac{81D}{a^4} \left[ 22w_4 - 16(w_2 + w_5) + 4w_3 + 2(w_1 + w_6) \right] = \frac{1}{36} \left[ 16p_4^* + 8(p_2^* + p_5^*) + 2p_3^* + p_1^* + p_6^* \right]$$

$$\frac{81D}{a} \left[ 22w_5 - 8(w_3 + w_6 + w_4) + 3w_2 \right] = \frac{1}{36} \left[ 17p_5^* + 4(p_3^* + p_4^* + p_6^* + p_9^*) + p_2^* + p_8^* + p_{10}^* \right]$$

$$\frac{81D}{a} \left[ 18w_6 - 16w_5 + 2(w_3 + w_4) \right] = \frac{1}{36} \left[ 16p_6^* + 8(p_5^* + p_8^*) + p_4^* + p_7^* + 2p_9^* \right]$$

Os valores  $p_i^*$  são obtidos da expressão (VI-6) e para os pontos 3 e 5 usou-se a molécula da fig. (II-19), assim como no ponto 6 a fig. (II-18), associadas ao fato de que  $M_T(x,y)$  será nulo nos pontos do contorno.

Procedimentos análogos foram utilizados para a malha referente à fig. (VI-3b), obtendo-se os seguintes resultados:

	Solução Analítica	Solução Numérica		Erro Relativo %	
		6 x 6	15 x 15		
$w_1$	0.0177A	0.0173A	0.0176A	2.44	0.90
$M_{x1}$	-0.0416B	-0.0448B	-0.0442B	7.14	5.88
$M_{y1}$	-0.0416B	-0.0448B	-0.0442B	7.14	5.88
$M_{xy1}$	0	0	0	0	0

Onde  $A = \alpha_T E (T_1 - T_2) t^2 a^2 / D(1 - \nu)$ ;  $B = \alpha_T E (T_1 - T_2) t^2$ ;  $\nu = 0,2$

Como solução analítica disponível citamos a apresentada por BOLEY [7] nas expressões (12.4.8) e (12.4.11), que evidentemente adaptadas ao caso presente nos fornece:

$$w(x,y) = \frac{1024\alpha_T E(T_1 - T_2)t^2 a^2}{3\pi D(1-\nu)} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x/2a)\sin(n\pi y/2a)}{m^3 n^2 (m+n)^2} \quad (\text{VI-7})$$

Os esforços serão obtidos por substituição de (VI-7) em (II-13,14,15).

A solução analítica disponível apresenta uma convergência lenta e podemos observar que malhas não muito refinadas fornecem resultados satisfatórios.

Maior precisão será obtida se empregarmos a expressão (II-48) para representar o carregamento fictício  $p_z^*$  em cada ponto. Como exemplo, usando a malha da fig. (VI-3a), encontramos:

$$w_1 \approx 0.0177\alpha_T E(T_1 - T_2)t^2 a^2 / D(1-\nu); \quad Mx_1 = My_1 \approx -0.0421\alpha_T E(T_1 - T_2)t^2$$

Verificamos assim que a flecha coincide com o valor analítico, enquanto os esforços apresentam erro relativo de 1,2%

### 6.2.3. Placa Retangular com dois bordos opostos livres e dois simplesmente apoiados

Neste exemplo procuramos demonstrar o tratamento de bordos livres e o emprego de malha retangular, já que até o momento utilizamos apenas malhas quadradas.

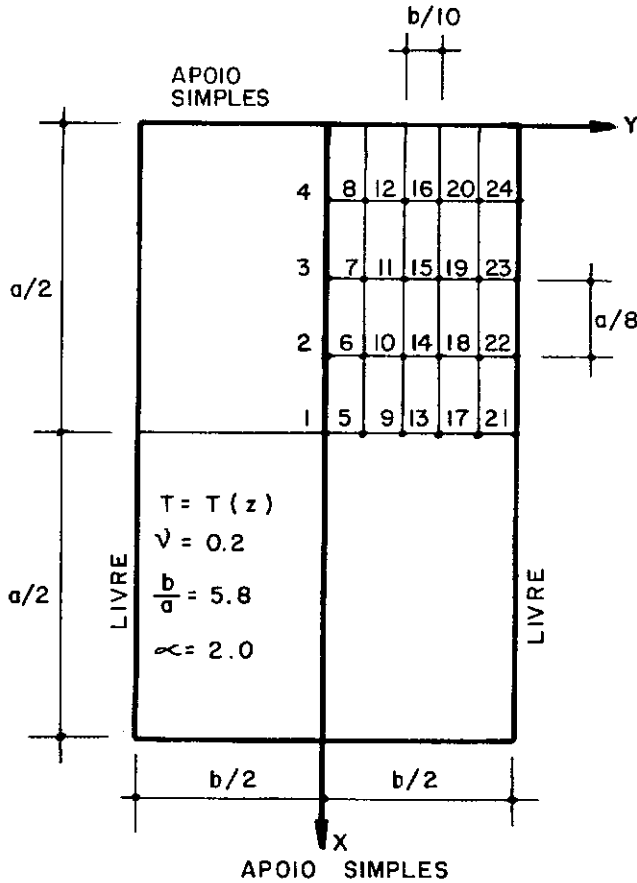


FIGURA VI - 4 - Placa Retangular com 2 Bordos Livres e 2 Apoiados

Na obtenção do sistema de equações lineares foram usadas as "moléculas" das fig. (II-10,19,23,26,35,38), observando ainda que:  $p_z^*(x,y) = 0$  e  $M_T(x,y) = M_T$  (constante). Notamos que a aplicação da equação geral nos pontos do contorno ou próximo dele torna-se imediata, uma vez que as expressões já se encontram prontas para qualquer malha retangular.

Como solução analítica dispomos da expressão (IX 2-43 e 47) NOWACKI [15], transcrita a seguir:

$$w(x,y) = \frac{4a^2 M_T}{\pi D} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n x}{n} (1 + A_n \cosh \alpha_n y + B_n \alpha_n y \sinh \alpha_n y) \quad (\text{VI-8})$$

$$\text{Onde: } \alpha_n = \frac{n\pi}{a}; \quad A_n = \frac{(1-\nu) \frac{\beta_n}{2} \coth \frac{\beta_n}{2} - (1+\nu)}{(3+\nu) \cosh \frac{\beta_n}{2} - (1-\nu) \frac{\beta_n}{2} \times \frac{1}{\sinh(\beta_n/2)}};$$

$$B_n = - \frac{1-\nu}{(3+\nu) \cosh \frac{\beta_n}{2} - (1-\nu) \frac{\beta_n}{2} \times \frac{1}{\sinh(\beta_n/2)}}; \quad \beta_n = \alpha_n b$$

Com valores de  $n$  até 79 na expressão (VI-8) e com a malha da fig. (VI-4), chegamos aos seguintes resultados:

	Solução Analítica	Solução Numérica 24 x 24	Erro Relativo%
$w_1$	$0.1199M_T a^2/D$	$0.1199M_T a^2/D$	0
$M_{x1}$	$0.0359M_T$	$0.0368M_T$	2.51
$M_{y1}$	$-0.2862M_T$	$-0.3011M_T$	5.21
$M_{xy1}$	0	0	0

$$n = 1, 3, \dots, 79$$

As expressões para cálculo dos esforços, a partir de (VI-8) particularizadas para este exemplo, são as seguintes:

$$M_{x1} = M_T \left\{ -1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin n\pi/2}{n} \left[ 1 + 0.8A_n - 0.4B_n \right] \right\}$$

$$M_{y_1} = M_T \left\{ -1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin n\pi/2}{n} \left[ 0.2 - 0.8 A_n - 2 B_n \right] \right\}$$

$$A_n = \frac{(\pi/4) \operatorname{cotgh} (5n\pi/16) - 1.2}{3.2 \cosh (5n\pi/16) - (\pi/4) \times [1/\sinh (5n\pi/16)]}$$

$$B_n = - \frac{0.8}{3.2 \cosh (5n\pi/16) - (\pi/4) \times [1/\sinh (5n\pi/16)]}$$

Para ilustrar o cálculo de momentos torsores, abordamos o ponto nodal 20 da fig. (VI-4):

$$(M_{xy})_{20} \approx \frac{(1-\nu)D}{4hk} (-w_{15} + w_{23}) = \frac{(1-\nu)D}{8k} (-21.3155 + 17.4588) \frac{k}{D} M_T \approx -0.3857 M_T$$

A solução analítica correspondente é obtida a partir de (VI-8) após substituição em (II-15);  $M_{xy} = -0.3848 M_T$  (erro relativo 0.23%)

#### 6.2.4. Placa Retangular Sobre Base Elástica

Seja a placa retangular da fig. (VI-1) sob a ação de um campo térmico  $T = T(z)$ , na qual foram usadas malhas com 18 e 32 pontos (figura VI-1a,b).

Somando-se ao termo central das "moléculas" das fig. (II-10,18,19,20) a parcela  $\alpha^4 k^4 (\mu/D)$ , temos as expressões necessárias para instituir o sistema de equações lineares que rege o problema. Segundo TIMOSHENKO [22]:

$$\frac{\mu}{D} = \frac{1}{L^4} \Rightarrow L = \sqrt[4]{\mu/D} \quad (\text{VI-9})$$

A expressão (VI-9), tem a dimensão de um comprimento, para a qual adotaremos  $L = (5/6)a$ . Assim para as malhas da fig. (VI-1a,b), o termo adicional  $\propto k^4 (\mu/D)$ , terá os seguintes valores, respectivamente: 0.0016; 0.00050625.

Os resultados obtidos são os seguintes:

	Solução Analítica	Solução Numérica		Erro Relativo%	
		18 x 18	32 x 32		
$W_1$	$0.1116M_T a^2/D$	$0.1113M_T a^2/D$	$0.1116M_T a^2/D$	0.27	0
$M_{x1}$	$-0.1244M_T$	$-0.1072M_T$	$-0.1219M_T$	13.83	2.01
$M_{y1}$	$-0.7382M_T$	$-0.7178M_T$	$-0.7261M_T$	2.76	1.64

$$m, n = 1, 3 \dots 39$$

Como solução analítica citamos a expressão (IX-4.7)

NOWACKI <sup>15</sup>:

$$w(x,y) = \frac{16M_T}{Dab} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(\alpha_n^2 + \beta_m^2) \sin \alpha_n x \sin \beta_m y}{\alpha_n \beta_m [(\alpha_n^2 + \beta_m^2) + \mu/D]}; \alpha_n = \frac{n\pi}{a}; \beta_m = \frac{m\pi}{a}$$

Como exemplo de cálculo de momento torsor, seja o ponto (18) da fig. (VI-1a):

$$(M_{xy})_{18} \approx \frac{B(1-\nu)}{4hk} w_{14} = \frac{D(1-\nu)}{k^2} 2.056330 \frac{k^2}{D} M_T = 0.6266M_T(1-\nu)$$

A solução analítica nos fornece:  $0.6201 M_T(1-\nu)$



### 6.2.5. Placa Circular com Furo Central

Seja a placa circular simplesmente apoiada da fig. (VI-6) cujos raios interno e externo são respectivamente  $a$ ,  $b = 2a$ , e o coeficiente de Poisson  $\nu = 0.2$ . Supomos a atuação de um campo térmico  $T = T(z)$ , caracterizando-se assim um caso de flexão com simetria axial.

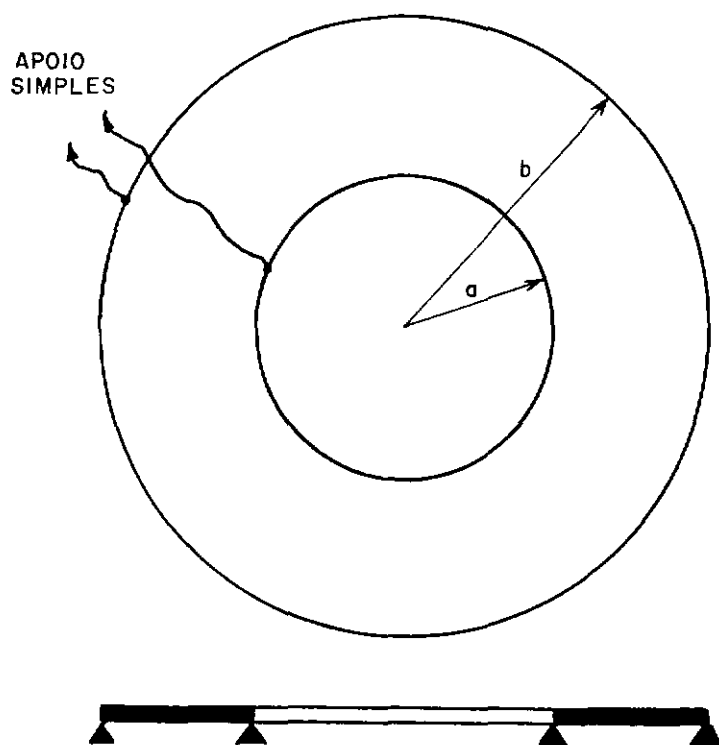


FIGURA VI - 6 - Placa Circular com Furo Central

Admitindo-se a divisão do domínio em 5 e 7 partes iguais [ver figuras VI-7a e b], as grandezas auxiliares ficam definidas respectivamente em:

$$N = 5; \quad \lambda = 2; \quad R = a; \quad \chi_i = (5 + n)a$$

$$N = 7; \quad \lambda = 2; \quad R = a; \quad \chi_1 = (7 + n)a$$

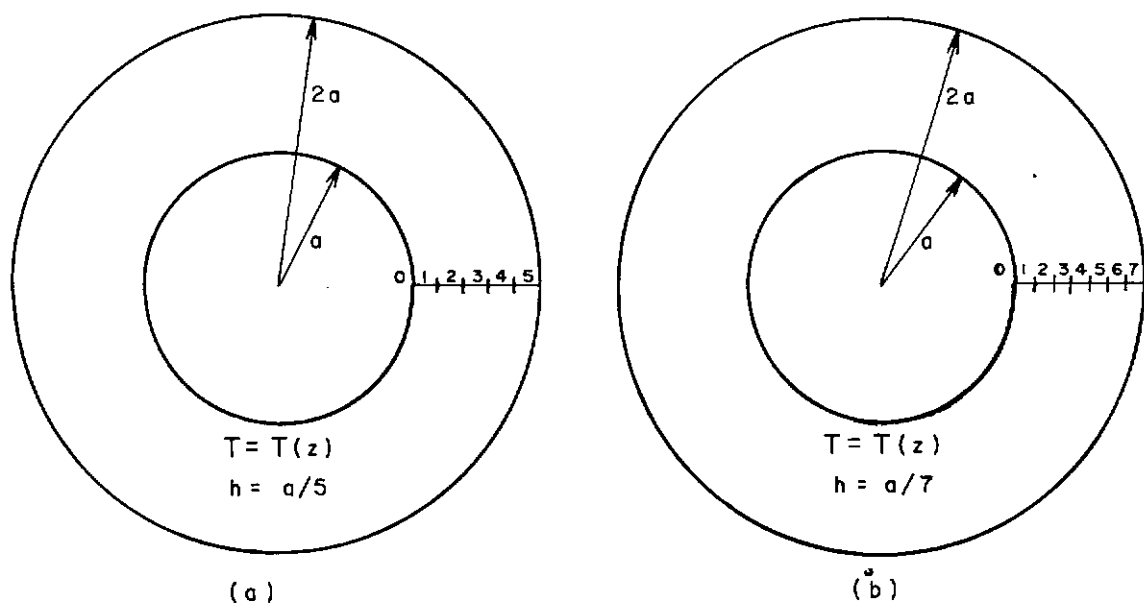


FIGURA VI-7 - Divisão do Domínio

Com base na equação geral (IV-21) juntamente com as condições de contorno (IV-24), obtemos o sistema de equações lineares que rege o problema. Transcrevemos como exemplo, apenas o sistema de equações referentes ao caso da fig. (VI-7b)

$$\begin{bmatrix} 21016.11594 & -17468 & 4608 & 0 & 0 & 0 \\ -2487.15 & 39528 & -27778.5 & 7290 & 0 & 0 \\ 9000 & -38105 & 60200 & -42095 & 11000 & 0 \\ 0 & 13310 & -56028.5 & 88088 & -61341.5 & 15972 \\ 0 & 0 & 19008 & -79638 & 124704 & -86538 \\ 0 & 0 & 0 & 26364 & -110025.5 & 141382.2837 \end{bmatrix} \{w\} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 74.202898 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 623.262 \\ 411 \end{Bmatrix} \frac{M_T a^2}{D}$$

Como solução analítica disponível citamos a expressão (12.4.23) BOLEY [7], que devidamente adaptada às condições de contorno presentes e no caso particular de  $a = 5m$  nos fornece:

$$w(r) = \left[ 14.63123 \ln \left( \frac{r}{5} \right) - 0.21108 r^2 \ln \left( \frac{r}{5} \right) + 0.05986 (r^2 - 25) \right] \frac{M_T}{D} \quad (VI-10)$$

Para o caso da fig. (VI-7a), temos:

	Solução Analítica ( $M_T/D$ )	Solução Numérica ( $M_T/D$ )	Erro Relativo%
$w_1$	1.9406	1.8896	2.63
$w_2$	2.8795	2.7959	2.90
$w_3$	2.8619	2.7714	3.16
$w_4$	1.9024	1.8377	3.40

Conseguimos aproximação melhor no caso da fig. (VI-7b), onde apresentamos, além das flechas, os momentos fletores no ponto 1, baseando-nos nas expressões (IV-20 a e b), para os valores analíticos, e em (IV-26 a e b), para os valores aproximados.

	Solução Analítica ( $\times M_T/D$ )	Solução Numérica ( $\times M_T/D$ )	Erro Relativo%
$W_1$	1.4915	1.4897	0.12
$W_2$	2.4621	2.4598	0.09
$W_3$	2.9350	2.9328	0.07
$W_4$	2.9222	2.9207	0.06
$W_5$	2.4288	2.4275	0.05
$W_6$	1.4554	1.4547	0.05
$(M_r)_1$	-0.0421 D	-0.0418 D	0.95
$(M_\theta)_1$	-1.0968 D	-1.0976 D	0.08

A aproximação obtida tanto para flechas como para esforços é excelente, considerando ainda o número razoavelmente pequeno de divisões do domínio, o que nos conduziu a um sistema de equações de  $6 \times 6$ .

#### 6.2.6. Placa Circular

Seja a placa circular da fig. (VI-8) sujeita a um campo térmico  $T = T(z)$ .

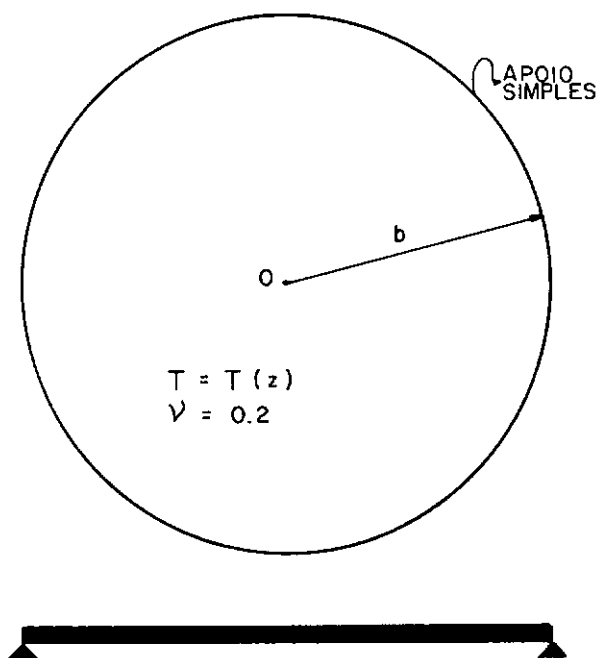


FIGURA VI- 8 - Placa Circular Simplesmente Apoiada

A finalidade principal deste exemplo é ilustrar o tratamento de pontos singulares, ou seja, aqueles em que a coordenada  $r_i$  é nula, caso do ponto "o" da figura anterior.

Tomando-se  $N = 11 \div 2 = 5.5$  (Ver fig. VI-9), as de mais grandezas auxiliares, segundo (IV-14), ficam definidas como:

$$R = b; \quad \chi_i = (n^* + \frac{1}{2})b; \quad n^* = 0, 1, 2, \dots$$

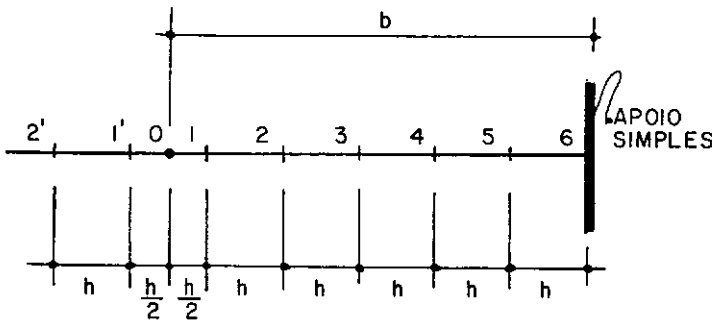


FIGURA VI- 9 - Divisão do Dominio

Com base nas expressões (IV-21), (IV-24a) adaptadas a este caso particular de ponto singular através das expressões (IV-14), chegamos ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix}
 0.375 & -0.5625 & 0.1875 & 0 & 0 \\
 -14.8125 & 34.875 & -28.5 & 8.4375 & 0 \\
 23.4375 & -132.5 & 246.875 & -192.5 & 54.6875 \\
 0 & 107.1875 & -528.5 & 924.875 & -696.5 \\
 0 & 0 & 318.9375 & -1480.5 & 2017.587054
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 w_1 \\
 w_2 \\
 w_3 \\
 w_4 \\
 w_5
 \end{Bmatrix}
 \frac{D}{M_T b^2} = \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 16.27232
 \end{Bmatrix}$$

Como solução analítica citamos a expressão (12.4.23 -- 12.4.29) BOLEY <sup>[7]</sup> ou ainda (IX.3-12) NOWACKI <sup>[15]</sup>, transcrita a seguir:

$$w(r) = M_T (b^2 - r^2) / 2D(1 + \nu) \quad (\text{VI-11a})$$

A solução do sistema de equações anterior conduz a resultados que se igualam à solução analítica, ou seja:

$$w_1 = 0.4132 \frac{M_T b^2}{D}; \quad w_2 = 0.3857 \frac{M_T b^2}{D}; \quad w_3 = 0.3306 \frac{M_T b^2}{D}$$

$$w_4 = 0.2479 \frac{M_T b^2}{D}; \quad w_5 = 0.1377 \frac{M_T b^2}{D} \quad (\text{VI-11b})$$

Para os momentos fletores, a substituição de (VI-11a) em (IV-20a; b) revela que a placa não está sujeita a esforços de flexão, ou seja,  $M_r = M_\theta = 0$ . Utilizando-se a solução (VI-11b) em (IV-26a e b) confirmamos tal fato.

Verificamos assim a facilidade de tratamento de placas com pontos singulares

#### 6.2.7. Setor Circular

Seja a placa da fig. (VI-10) sob a ação de um campo térmico  $T = T(z)$ , tendo como consequência  $p_z^*(r, \theta) = 0$ .

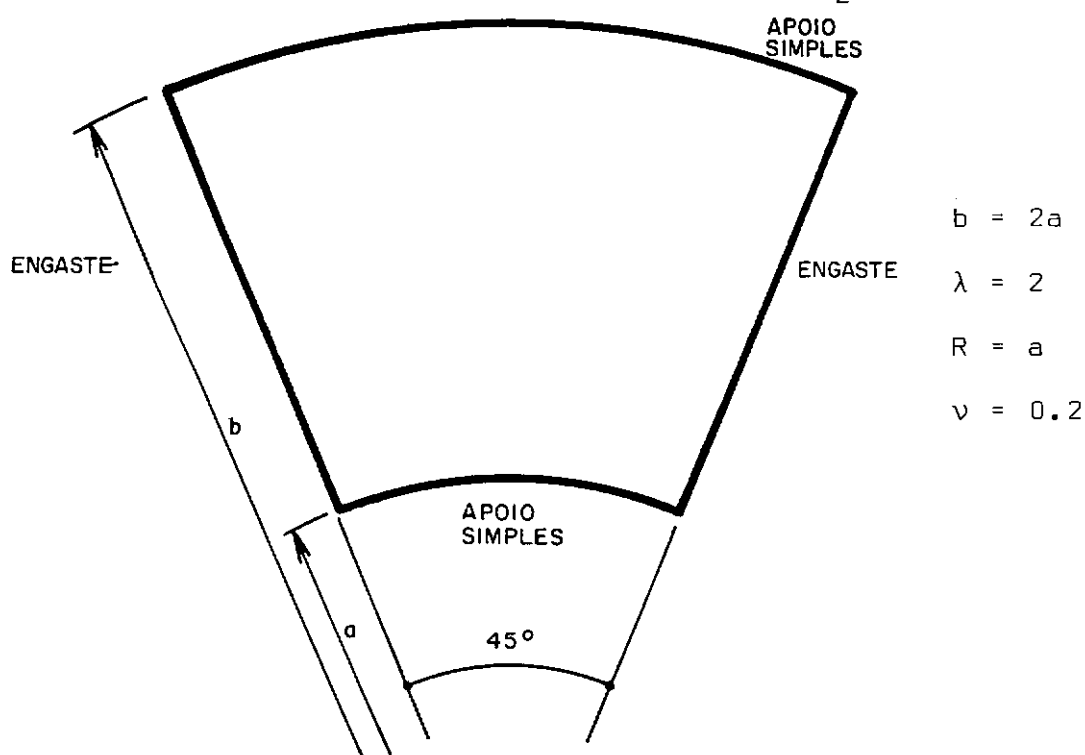
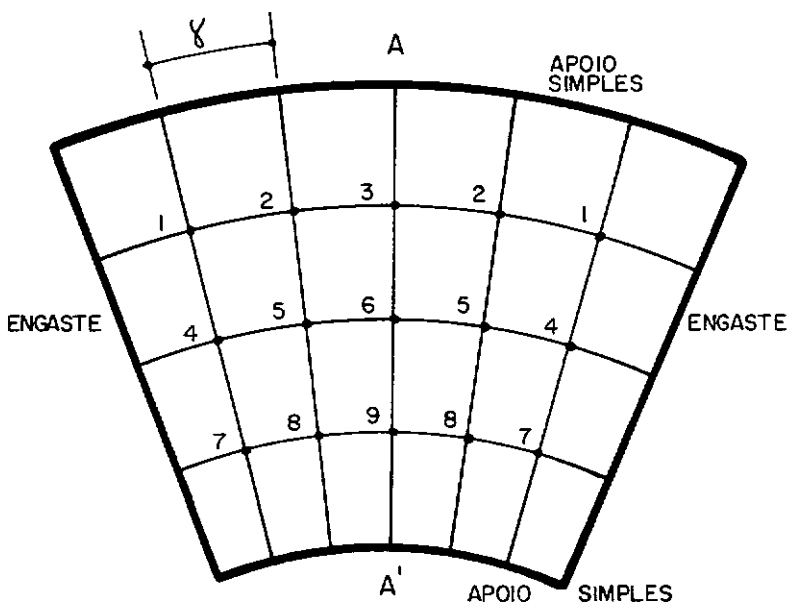


FIGURA VI-10 - Placa em forma de Setor Circular

O objetivo principal deste exemplo é ilustrar o uso da equação geral de flexão térmica em coordenadas polares, representada esquematicamente na fig. (IV-4) complementada com as expressões (IV-12). Neste caso não dispomos de solução analítica, então nos limitaremos a observar a convergência das flechas e momentos no ponto central da placa, através das malhas apresentadas a seguir, observando-se a simetria em relação a linha A-A'.



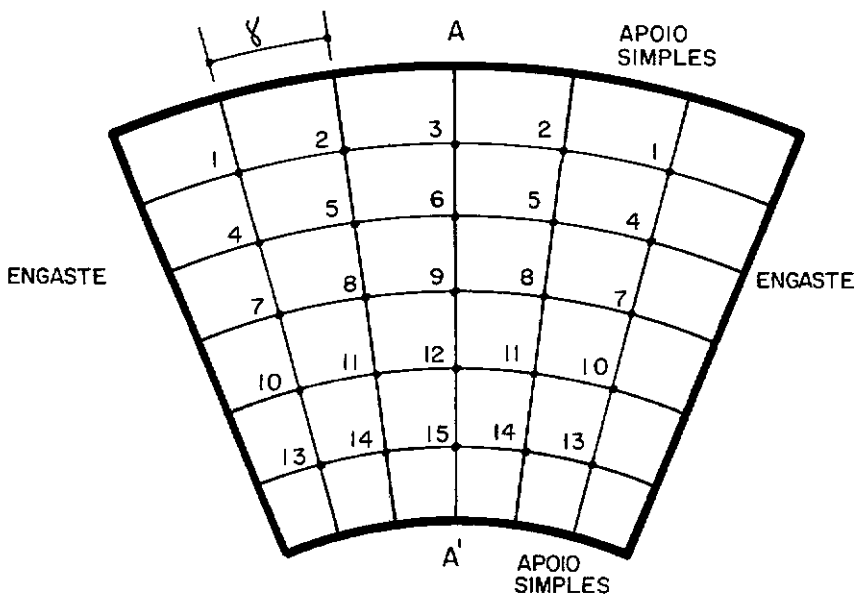
$$\gamma = \pi/24$$

$$N = 4$$

$$\chi_1 = (4+n)a$$

Ponto Central: 6

FIGURA VI-11a - Malha com 9 pontos



$$\gamma = \pi/24$$

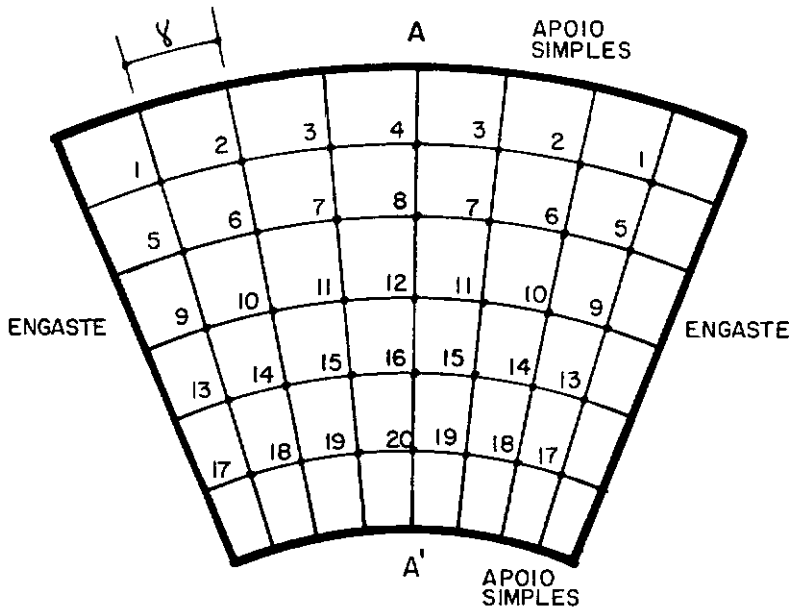
$$N = 6$$

$$\chi_1 = (6+n)a$$

Ponto Central: 9

FIGURA VI-11b - Malha com 15 pontos





$$\gamma = \pi/32$$

$$N = 6$$

$$X_i = (6+n)a$$

Ponto Central: 12

FIGURA VI-11c - Malha com 20 pontos

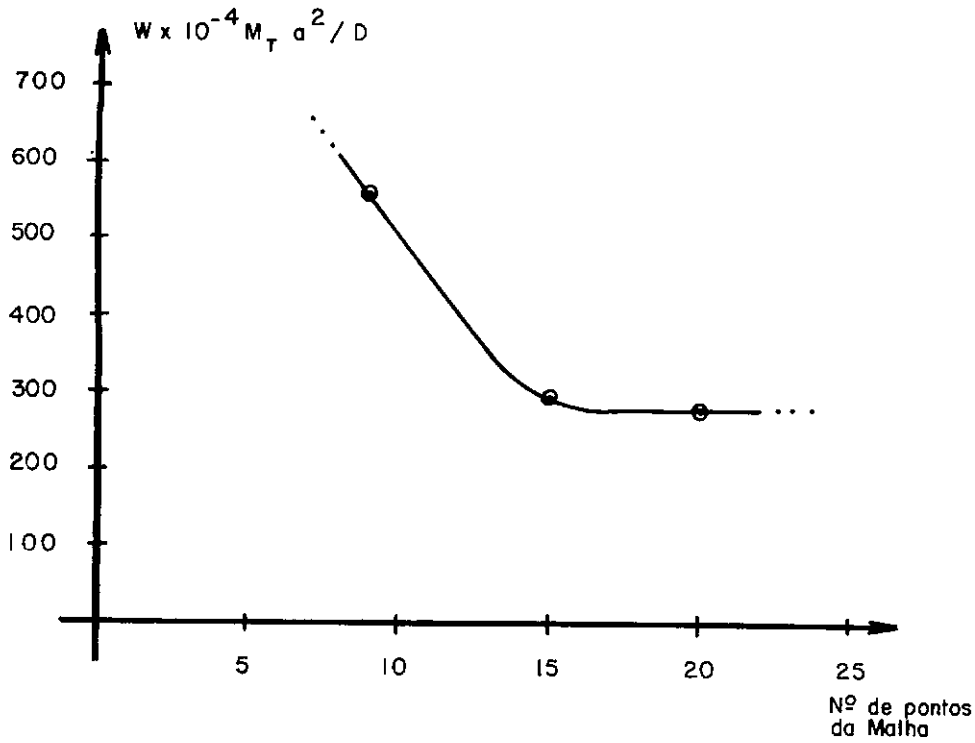
Para a instituição dos sistemas de equações referentes a cada uma das malhas da fig. (VI-11), foram empregadas, além da equação geral da fig. (IV-4), as moléculas das fig. (IV-12,14,16,17).

De acordo com o refinamento da malha, as flechas no ponto central são as seguintes:

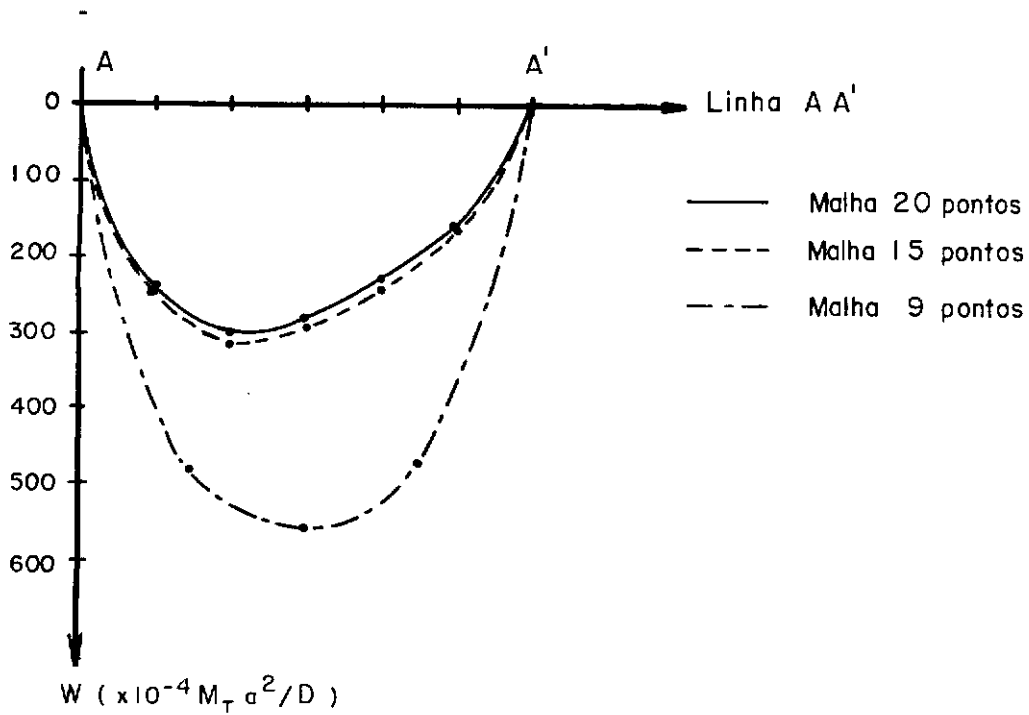
$$w_{\text{centro}} = 0.0560 M_T a^2 / D; \quad w_{\text{centro}} = 0.0295 M_T a^2 / D;$$

$$w_{\text{centro}} = 0.0280 M_T a^2 / D$$

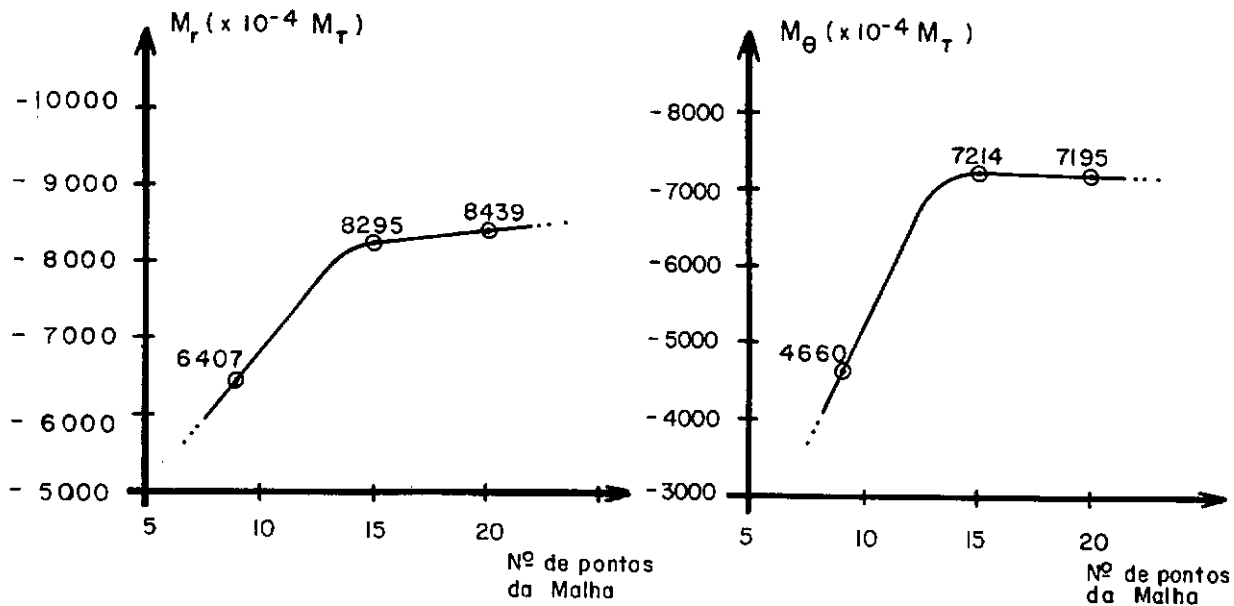
Em forma de gráfico temos:



Para as flechas ao longo da linha AA', temos:



Usando as expressões do item 4.7. obtemos os momentos fletores e torsores no centro da placa.



Devido à simetria da superfície fletida em relação a linha A-A', temos ao longo da mesma, momentos torsores nulos.

Os gráficos demonstram a convergência tanto para flechas como para momentos fletores a partir da malha com 15 pontos. Ressaltamos ainda a simplicidade e facilidade na obtenção dos esforços e flechas.

#### 6.2.8. Placas Retangulares Ortotrópicas

Sendo a ortotropia um caso mais geral que a isotropia, uma particularização do primeiro conduz ao segundo. Isto pode ser comprovado em todas as expressões obtidas no capítulo V, se confrontadas com as correlatas do capítulo II. Mediante este fato julgamos desnecessário a apresentação de um exemplo específico sobre placas ortotrópicas.

A particularização para isotropia envolveria as seguintes expressões:

$$\nu_x = \nu_y = \nu ; \alpha_{Tx} = \alpha_{Ty} = \alpha_T ; E_x = E_y = E$$

$$D_x = D_y = B = D ; G_{xy} = E/2(1+\nu)$$

$$D_t = D(1-\nu)/2 ; M_{Tx} = M_{Ty} = M_T$$

As grandezas auxiliares do capítulo V, se transformariam em:  $C = \alpha^2 (2-\nu)$  ;  $A = (2-\nu)/\alpha^2$

Cumprе ressaltar que caso as direções principais de ortotropia não coincidam com as direções dos eixos coordenados (X,Y,Z), contrariando nossa hipótese inicial [item 5.2], tal fato pode ser contornado se aplicarmos uma rotação de eixos conforme sugerido em AMBARTSUMYAN <sup>[1]</sup> (capítulo I, item 5)

### 6.3. Conclusões

#### 6.3.1. Sobre os exemplos analisados

Após a observação dos gráficos e tabelas apresentadas nos exemplos anteriores, podem-se estabelecer certas conclusões sobre o estudo da flexão térmica das placas:

a) Os resultados obtidos para as flechas são melhores que os dos esforços. Isto pode ser justificado pelo fato de que estes

são calculados por aproximações das derivadas de 2.<sup>a</sup> ordem das flechas, as quais já apresentam uma certa imprecisão. Isto tende a se agravar à medida que aumenta a ordem das derivadas, como no caso do cálculo de esforços cortantes.

b) Representações mais refinadas do carregamento fictício  $p^*(x,y)$ , como no caso das expressões (II-48), (IV-22b), conduzem a resultados melhores.

c) Existe um certo espaçamento entre os pontos nodais, a partir do qual, o acréscimo de precisão obtido, tanto para flechas como para esforços, é lento. A malha "ideal" pode ser conseguida através de um aumento gradativo do número de pontos nodais, acompanhado de um simples teste de convergência.

d) Problemas mais simples podem ser resolvidos com o uso de calculadoras eletrônicas de bolso obtendo-se resultados satisfatórios, como no caso de placas circulares com simetria axial.

### 6.3.2. Sobre o uso do método das Diferenças Finitas

a) Malha cuja relação ( $\alpha$ ) entre os espaçamentos é um número inteiro facilita o cálculo dos elementos da matriz dos coeficientes  $[K]$ .

b) Devem-se numerar os pontos da malha na forma apresentada nos exemplos, pois assim a matriz dos coeficientes  $[K]$ , será uma matriz banda menor. Como geralmente esta matriz é introduzida por coluna nos programas automáticos de solução de sistemas de equações lineares simultâneas, tanto em computadores como em calculadoras eletrônicas, tal fato se tornará considera

velmente mais vantajoso.

c) Ressaltamos a simplicidade e versatilidade na aplicação do método das diferenças finitas no caso das placas analisadas durante este trabalho. Por exemplo: podemos com a formulação presente analisar o caso de um campo térmico atuando em apenas uma região (A) da placa, como na fig. (VI-12).

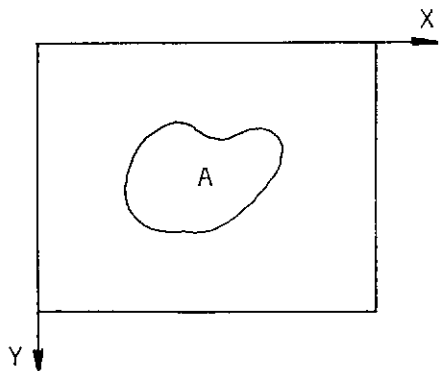


FIGURA VI-12 - Campo térmico restrito a região A

d) No caso particular das placas circulares com bordos livres a formulação obtida apesar de longa é de fácil aplicação. Ressaltamos ainda que naquelas expressões temos apenas como variável o valor de "n" implícito em  $\chi_i$ .

e) Toda formulação empregada se reduz ao exame da flexão isotérmica se anularmos todos os termos relacionados com o "momento fletor térmico equivalente"  $M_T$  e suas derivadas.

f) A superposição dos efeitos de um campo térmico e cargas transversais, atuando separadamente é possível, como mostram as expressões (II-25) e (II-26), ou (IV-1) e (IV-8) no caso das placas circulares.

g) Um campo térmico qualquer  $T(x,y,z)$  pode ser expresso por:

$$T(x, y, z) = \sum_{k=0}^N z^k T_k(x, y)$$

Somente os termos com K ímpar influenciarão os efeitos de flexão, enquanto os demais terão grande importância para o cálculo dos esforços de membrana.

### 6.3.3. Sobre a continuação da pesquisa

No que diz respeito ao prosseguimento deste trabalho, podemos sugerir as seguintes alternativas:

- a) Análise das placas sob a teoria de von Kármán, apresentada em SZILARD [20] no capítulo 3.5.
- b) Análise das placas com malhas irregulares em diferenças finitas, apresentado por SANTOS [19].
- c) Aproveitamento dos resultados da flexão térmica das placas na solução dos problemas de protensão nas lajes, onde nesse caso a Lei de Hooke, que é básica para o estabelecimento das relações momento-curvatura, escrever-se-ia:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x + \nu \sigma_y) + \epsilon_{xp}$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y + \nu \sigma_x) + \epsilon_{yp}$$

onde  $\epsilon_{xp}$  e  $\epsilon_{yp}$  são as deformações impostas pela protensão num elemento de placa.

BIBLIOGRAFIA

1. AMBARTSUMYAN, S.A., Theory of anisotropic plates, Stamford, Technomic Publishing Co., 1970.
2. ARIMAN, T., and HOFFMAN, R.E., Thermal bending of plates with circular holes, Nuclear Engineering and Design, Amsterdam (14): 231-238, 1970.
3. ARIMAN, T., RAO, K.S., and RAO, M.N.B., Thermal stress in plates with circular holes, Nuclear Engineering and Design, Amsterdam (15): 97-112, 1971.
4. BAKER, B.R., Some fundamental thermoclastic problems in orthotropic slabs, Journal of Applied Mechanics, New York, Vol. 45, March 1966.
5. BARÈS, R., Tables pour le calcul des dalles et des parois, Paris, Dunod, 1969.
6. BOLEY, B.A., Survey of recent developments in the fields of heat conduction in solids and thermo-elasticity, Nuclear Engineering and Design, Amsterdam (18): 377-399, 1972.
7. BOLEY, B.A., and WEINER, J.H., Theory of thermal stress, New York, John Wiley & Sons, 1960.
8. BORG, S.F., Matrix-tensor methods in continuum mechanics, Princeton, D. Van Nostrand, Inc., 1963.
9. CUSENS, A.R., and PAMA, R.P., Bridge deck analysis, London, John Wiley & Sons, 1975.



10. GHALI, A., and NEVILLE, A.M., Structural analysis, 2<sup>nd</sup> ed., London, Chapman and Hall, 1978.
11. GUTIERREZ, R.H., LAURA, P.A.A., SARMIENTO, G.S. and BASOMBRIÓ, F.G., Thermal stress in rectangular plates: variational and finite element solutions, Nuclear Engineering and Design, Amsterdam (47): 297-303, 1978.
12. KANTOROVICH, L.V., and KRILOV, V.I., Approximate methods of higher analysis, New York, John Wiley & Sons, 1958.
13. KERAMIDAS, G.A., and TING, E.C., A finite element formulation for thermal stress analysis; Part I: variational formulation, Nuclear Engineering and Design, Amsterdam (39): 267-275, 1976.
14. KOVALENKO, A.D., Thermoelasticity, Netherlands, Wolters-Noordhoff Publishing Groningen, 1969.
15. NOWACKI, W., Thermoelasticity, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, 1962.
16. PARKUS, H., High temperature structure and Materials, Oxford, Pergamon Press, 1964.
17. SALVADORI, M.G., and BARON, M.L., Numerical methods in Engineering, New Jersey, Printice Hall, 1961.
18. SANTOS, S.M.G., Cálculo numérico de placas e paredes delgadas de contorno poligonal qualquer, Revista Estrutura, Rio de Janeiro (27): 465-484, 1960.
19. SANTOS, S.M.G., Tensões térmicas nas placas, PDD-13/78,

COPPE, UFRJ.

20. SZILARD, R., Theory and analysis of plates, New Jersey  
Printice-Hall, 1974.
21. TIMOSHENKO, S., and GOODIER, J.N., Theory of elasticity, 2<sup>nd</sup>  
ed., New York, McGraw-Hill Book Company, 1951.
22. TIMOSHENKO, S., and WOINOWSKY-KRIEGER, S., Theory of plates  
and shells, 2<sup>nd</sup> ed., New York, McGraw-Hill Kogakusha  
LTD., 1959.

LISTAGEM DOS EXEMPLOS

São apresentados a seguir as listagens de computador referentes aos resultados numéricos citados no capítulo VI.

Placa Retangular Simplesmente Apoiada:  $T = T(z)$

```

FILE 6(KIND=PRINTER)
  DIMENSION A(18,18), B(18), WKAREA(380)
  DATA M,N,IA, IDGT/1,18,18,5/, A/20.,-8.,1.,-8.,2.,0.,1.,11*0.,-16.,2
  *1.,-8.,4.,-8.,2.,0.,1.,10*0.,2.,-8.,19.,0.,2.,-8.,2*0.,1.,9*0.,-16
  *.4.,0.,21.,-8.,1.,-8.,2.,0.,1.,8*0.,8.,-16.,4.,-16.,22.,-8.,4.,-8
  *-2.,0.,1.,8*0.,4.,-16.,2.,-8.,20.,0.,2.,-8.,2*0.,1.,6*0.,2.,2*0.
  *-8.,2.,0.,20.,-8.,1.,-8.,2.,0.,1.,6*0.,2.,0.,4.,-8.,2.,-16.,21.,-8
  *.4.,-8.,2.,0.,1.,6*0.,2.,0.,2.,-8.,2.,-8.,19.,0.,2.,-8.,2*0.,1.,6
  **0.,1.,2*0.,-8.,2.,0.,20.,-8.,1.,-8.,2.,0.,1.,6*0.,1.,0.,4.,-3.,2
  *-16.,21.,-8.,4.,-8.,2.,0.,1.,6*0.,1.,0.,2.,-8.,2.,-8.,19.,0.,2.,
  *-8.,2*0.,1.,6*0.,1.,2*0.,-8.,2.,0.,20.,-8.,1.,-8.,2.,8*0.,1.,0.,4.
  *-8.,2.,-16.,21.,-8.,4.,-8.,2.,8*0.,1.,0.,2.,-8.,2.,-8.,19.,0.,2.,
  *-8.,9*0.,1.,2*0.,-8.,2.,0.,19.,-8.,1.,10*0.,1.,0.,4.,-8.,2.,-16.,2
  *-0.,-8.,11*0.,1.,0.,2.,-8.,2.,-8.,18.,-8.,2*0.,1.,2*0.,1.,2*0.,1.,2*
  *0.,1.,2*0.,1.,1.,1.,2./
  CALL LEQT2F(A,M,N,IA,B, IDGT, WKAREA, IER)
  IF(IER.GE.33) STOP
  WRITE(6,4)
4  FORMAT(/,25X,'** PLACA RETANGULAR COM 4 APOIOS SIMPLES **',/)
  WRITE(6,1)
1  FORMAT(/,40X,'** RESULTADOS: W/(K**2*MT/D) **',/)
  DO 2 I=1,N
2  WRITE(6,3) I, B(I)
3  FORMAT(I20,I5,I34,E18.7)
  STOP
END

```

---

\*\* PLACA RETANGULAR COM 4 APOIOS SIMPLES \*\*

---

\*\* RESULTADOS: W/(K\*\*2\*MT/D) \*\*

---

1	.4070930E+01
2	.3628310E+01
3	.2285280E+01
4	.4013549E+01
5	.3578516E+01
6	.2256405E+01
7	.3826236E+01
8	.3415799E+01
9	.2161823E+01
10	.3459797E+01
11	.3095622E+01
12	.1975087E+01
13	.2819707E+01
14	.2535305E+01
15	.1641904E+01
16	.1747420E+01
17	.1584987E+01
18	.1056723E+01

---

## 163

```

FILE 6(KIND=PRINTER)
DIMENSION A(32,32),WKAREA(1120)
DATA M,N,IA,IGDT,1/32,32,7/3A/20.00000000,-8.,1.,0.,-8.,2.,2*0.,1
*23*0.,-16.,21.00000000,-8.,1.,4.,-8.,2.,2*0.,1.,22*0.,2.,-8.,20.
*0.00000000,-8.,0.,2.,-8.,2.,2*0.,1.,22*0.,1.,-8.,19.00000000,2*0.,2.
*5.,3*0.,1.,20*0.,-16.,4.,2*0.,21.00000000,-8.,1.,0.,-8.,2.,2*0.
*1.,19*0.,-8.,-16.,4.,0.,-16.,22.00000000,-8.,1.,4.,-8.,2.,2*0.,1.
*9*0.,4.,-16.,4.,2.,-8.,21.00000000,-8.,0.,2.,-8.,2.,2*0.,1.,19*0.
*4.,-16.,0.,1.,-8.,20.00000000,2*0.,2.,-8.,3*0.,1.,16*0.,2.,3*0.,-8
*2.,2*0.,20.00000000,-8.,1.,0.,-8.,2.,2*0.,1.,16*0.,2.,2*0.,4.,-8
*2.,0.,-16.,21.00000000,-8.,1.,4.,-8.,2.,2*0.,1.,16*0.,2.,2*0.,2.
*-8.,2.,2.,-8.,20.00000000,-8.,0.,2.,-8.,2.,2*0.,1.,16*0.,2.,2*0.
*2.,-8.,0.,1.,-8.,19.00000000,2*0.,2.,-8.,3*0.,1.,16*0.,1.,3*0.,-8.
*2.,2*0.,20.00000000,-8.,1.,0.,-8.,2.,2*0.,1.,16*0.,1.,2*0.,4.,-8.
*2.,0.,-16.,21.00000000,-8.,1.,4.,-8.,2.,2*0.,1.,16*0.,1.,2*0.,2.
*-8.,2.,2.,-8.,20.00000000,-8.,0.,2.,-8.,2.,2*0.,1.,16*0.,1.,2*0.,2
*.,-8.,0.,1.,-8.,19.00000000,2*0.,2.,-8.,3*0.,1.,16*0.,1.,3*0.,-8.
*2.,2*0.,20.00000000,-8.,1.,0.,-8.,2.,2*0.,1.,16*0.,1.,2*0.,4.,-8.
*2.,0.,-16.,21.00000000,-8.,1.,4.,-8.,2.,2*0.,1.,16*0.,1.,2*0.,2.
*8.,2.,2.,-8.,20.00000000,-8.,0.,2.,-8.,2.,2*0.,1.,16*0.,1.,2*0.,2.
*-8.,0.,1.,-8.,19.00000000,2*0.,2.,-8.,3*0.,1.,16*0.,1.,3*0.,-8.,2
*2*0.,20.00000000,-8.,1.,0.,-8.,2.,2*0.,1.,16*0.,1.,2*0.,4.,-8.,2
*0.,-16.,21.00000000,-8.,1.,4.,-8.,2.,2*0.,1.,16*0.,1.,2*0.,2.-8
*2.,2.,-8.,20.00000000,-8.,0.,2.,-8.,2.,2*0.,1.,16*0.,1.,2*0.,2.
*-8.,0.,1.,-8.,19.00000000,2*0.,2.,-8.,3*0.,1.,16*0.,1.,3*0.,-8.,2.
*2*0.,20.00000000,-8.,1.,0.,-8.,2.,19*0.,1.,2*0.,4.,-8.,2.,0.,-16.
*21.00000000,-8.,1.,4.,-8.,2.,19*0.,1.,2*0.,2.,-8.,2.,-3.,20.00
*000000,-8.,0.,2.,-8.,2.,19*0.,1.,2*0.,2.,-8.,0.,1.,-8.,19.00000000
*2*0.,2.,-8.,20*0.,1.,3*0.,-8.,2.,2*0.,19.00000000,-8.,1.,2*0.,1.
*2*0.,4.,-8.,2.,0.,-16.,20.00000000,-8.,1.,22*0.,1.,2*0.,2.,-8.,2.
*2.,-8.,19.00000000,-8.,23*0.,1.,2*0.,2.,-8.,0.,1.,-8.,18.00000000
*/3/3*0.,1.,3*0.,1.,3*0.,1.,3*0.,1.,3*0.,1.,3*0.,1.,3*0.,1.,1.,1.
*1.,2./
CALL LEQ2(ECA,M,N,IA,B,IGDT,WKAREA,IER)
IF(IER.GE.3)STOP
WRITE(6,4)
4 FORMAT(//,25X,'** PLACA RETANGULAR APODIADA **',//)
WRITE(6,1)
1 FORMAT(//,40X,'** RESULTADOS **',//)
DO 2 I=1,N
2 WRITE(6,3)I,B(I)
3 FORMAT(T20,I5,F34,E18.8)
STOP
END

```

\*\* PLACA RECTANGULAR APDIADA \*\*

\*\* RESULTADOS \*\*

[W/ (K\*\*2\*MT/D)]

1	.72592774E+01
2	.68155946E+01
3	.54760540E+01
4	.32163739E+01
5	.72029601E+01
6	.67635236E+01
7	.54361238E+01
8	.31947208E+01
9	.70255159E+01
10	.65994158E+01
11	.53101968E+01
12	.31263854E+01
13	.67002717E+01
14	.62984271E+01
15	.50788620E+01
16	.30006242E+01
17	.61787168E+01
18	.58151588E+01
19	.47062000E+01
20	.27972493E+01
21	.53842778E+01
22	.50772913E+01
23	.41335298E+01
24	.24821730E+01
25	.42038118E+01
26	.32761989E+01
27	.32684551E+01
28	.19979127E+01
29	.24785716E+01
30	.23552373E+01
31	.19661788E+01
32	.12410229E+01

Placa Quadrada Simplesmente Apoiada:  $T = T(x,y,z)$

```

FILE 6(KIND=PRINTER)
  DIMENSION A(15,15),B(15),WKAREA(270)
  DATA M,N,IA,IDGT/ 1,15,15, 7/,A/20.,-8.,1.,2*0.,2.,9*0.,-32.,25.,-
*8.,-1.,0.,-16.,3.,8*0.,4.,-8.,20.,-8.,-1.,4.,-8.,2.,0.,2.,6*0.,1.,-8
*.,20.,-8.,0.,2.,-8.,2.,0.,1.,6*0.,1.,-8.,19.,2*0.,2.,-8.,2*0.,1.,3
**0.,8.,-16.,4.,2*0.,22.,-8.,1.,0.,2.,6*0.,6.,-16.,4.,0.,-16.,23.,-
*8.,-1.,-16.,3.,6*0.,4.,-16.,4.,2.,-8.,21.,-8.,4.,-8.,2.,2.,5*0.,4.,
*-16.,0.,1.,-8.,20.,0.,2.,-8.,0.,1.,3*0.,2.,2*0.,2.,-8.,2.,0.,20.,-
*8.,1.,2.,5*0.,2.,2*0.,3.,-8.,2.,-16.,22.,-8.,-16.,3.,5*0.,2.,2*0.,
*2.,-8.,2.,-8.,19.,4.,-8.,2.,7*0.,1.,0.,2.,-8.,2.,20.,-8.,2.,8*0.,1
*.,0.,3.,-8.,-16.,21.,-16.,11*0.,1.,2.,-8.,18.,/B/1776.,1740.,1632.
*,1452.,1200.,1704.,1596.,1416.,1164.,1488.,1308.,1056.,1128.,876.,
*624./
  CALL LEQT2F(A,M,N,IA,8,IDGT,WKAREA,IER)
  IF (IER.GE.33) STOP
  WRITE(6,4)
4  FORMAT(/,25X,'** PLACA QUADRADA APOIADA COM VARIACAO PARABOLICA D
  *E TEMPERATURA **',/)
  WRITE(6,1)
1  FORMAT(/,40X,'** RESULTADOS **',/)
  DO 2 I=1,N
2  WRITE(6,3)I,B(I)
3  FORMAT(T20,I5,T34,E18.8)
  STOP
END

```

\*\* PLACA QUADRADA APOIADA COM VARIACAO PARABOLICA DE TEMPERATURA \*\*

\*\* RESULTADOS \*\*  $\left[ W / \alpha E (T_1 - T_2) t^2 a^2 / 3375000 D(1-\nu) \right]$

1	.59350989E+05
2	.56582348E+05
3	.48461369E+05
4	.35560112E+05
5	.18890919E+05
6	.53943235E+05
7	.46201969E+05
8	.33903257E+05
9	.18011376E+05
10	.39573965E+05
11	.29042226E+05
12	.15430526E+05
13	.21316265E+05
14	.11327457E+05
15	.60205408E+04



Placa Retangular com dois bordos opostos livres e  
dois simplesmente apoiados.

```

FILE 6(KIND=PRINTER)
DIMENSION A(24,24),B(24),WKAREA(648)
DATA M,N,IA,IOGT/1,24,24,7/,A/134.,-20.,1.,0.,-80.,8.,2*0.,16.,15*
*0.,-40.,135.,-20.,1.,16.,-80.,8.,2*0.,16.,14*0.,2.,-20.,134.,-20.,
*0.,8.,-80.,8.,2*0.,16.,14*0.,1.,-20.,133.,2*0.,8.,-80.,3*0.,16.,12
**0.,-160.,16.,2*0.,150.,-20.,1.,0.,-80.,8.,2*0.,16.,11*0.,32.,-160
*,16.,0.,-40.,151.,-20.,1.,16.,-80.,8.,2*0.,16.,11*0.,16.,-160.,16
*,2.,-20.,150.,-20.,0.,8.,-80.,8.,2*0.,16.,11*0.,16.,-160.,0.,1.,-
*20.,149.,2*0.,8.,-80.,3*0.,16.,8*0.,32.,3*0.,-80.,8.,2*0.,134.,-20
*,1.,0.,-80.,8.,2*0.,16.,8*0.,32.,2*0.,16.,-80.,8.,0.,-40.,135.,-2
*0.,1.,16.,-80.,8.,2*0.,16.,8*0.,32.,2*0.,8.,-80.,8.,2.,-20.,134.,-
*20.,0.,8.,-80.,8.,2*0.,16.,8*0.,32.,2*0.,8.,-80.,0.,1.,-20.,133.,2
**0.,8.,-80.,3*0.,16.,8*0.,16.,3*0.,-80.,8.,2*0.,134.,-20.,1.,0.,-8
*0.,8.,2*0.,32.,8*0.,16.,2*0.,16.,-80.,8.,0.,-40.,135.,-20.,1.,16
*-80.,8.,2*0.,32.,8*0.,16.,2*0.,8.,-80.,8.,2.,-20.,134.,-20.,0.,8
*-80.,8.,2*0.,32.,8*0.,16.,2*0.,8.,-80.,0.,1.,-20.,133.,2*0.,8.,-80
*,3*0.,32.,8*0.,16.,3*0.,-80.,8.,2*0.,118.,-20.,1.,0.,-92.,8.,14.4,1
*-1*0.,16.,2*0.,16.,-80.,8.,0.,-40.,119.,-20.,1.,28.8,-92.8,14.4,11
*0.,16.,2*0.,8.,-80.,8.,2.,-20.,118.,-20.,0.,14.4,-92.8,14.4,11*0.
*16.,2*0.,8.,-80.,0.,1.,-20.,117.,2*0.,14.4,-92.8,12*0.,16.,3*0.,-4
*6.4,7.2,2*0.,63.36,-16.64,0.96,14*0.,16.,2*0.,14.4,-46.4,7.2,0.,-3
*-3.28,-64.32,-16.64,0.96,14*0.,16.,2*0.,7.2,-46.4,0.96,-16.64,62.4,8/3*0.,4.
*,36,-16.64,15*0.,16.,2*0.,7.2,-46.4,0.96,-16.64,62.4,8/3*0.,4.
*,3*0.,4.,3*0.,4.,3*0.,4.,16.,16.,16.,20.,-32.,-32.,-32.,-28.8/
CALL LEQTZF(A,M,N,IA,B,IOGT,WKAREA,IER)
IF(IER.GE.33)STOP
WRITE(6,4)
4 FORMAT(/,25X,'** PLACA RETANGULAR 2 APOIOS OPOSTOS APOIADOS E 2 L
*IVRES**',/)
WRITE(6,1)
1 FORMAT(/,40X,'** RESULTADOS: W/(K**2*MT/D) **',/)
DO 2 I=1,N
2 WRITE(6,3)I,B(I)
3 FORMAT(T20,I5,T34,E18.8)
STOP
END

```

\*\* PLACA RETANGULAR 2 APOIOS OPOSTOS APOIADOS E 2 LIVRES \*\*

\*\* RESULTADOS:  $W/(K \cdot 2 \cdot MT/D)$  \*\*

1	.30699647E+02
2	.28820374E+02
3	.23144658E+02
4	.13572308E+02
5	.30438007E+02
6	.28575962E+02
7	.22952755E+02
8	.13466595E+02
9	.29638226E+02
10	.27827034E+02
11	.22360306E+02
12	.13136468E+02
13	.28256455E+02
14	.26526768E+02
15	.21315467E+02
16	.12538675E+02
17	.26222334E+02
18	.24598471E+02
19	.19726880E+02
20	.11584236E+02
21	.23443967E+02
22	.21939321E+02
23	.17458806E+02
24	.10102006E+02

# Placa Retangular Sobre Base Elástica

```

FILE 6(KIND=PRINTER)
DIMENSION A(18,18),B(18),WKAREA(380)
DATA M,N,IA,IDGT/1,18,18,6/,A/20.0016,-8.,1.,-8.,2.,0.,1.,11*0.,-1
*6.,21.0016,-8.,4.,-8.,2.,0.,1.,10*0.,2.,-8.,19.0016,0.,2.,-8.,0.,0
*1.,9*0.,-16.,4.,0.,21.0016,-8.,1.,-8.,2.,0.,1.,8*0.,8.,-16.,4.,-
*16.,22.0016,-8.,4.,-8.,2.,0.,1.,8*0.,4.,-16.,2.,-8.,20.0016,0.,2.,
*-8.,2*0.,1.,6*0.,2.,2*0.,-8.,2.,0.,20.0016,-8.,1.,-8.,2.,0.,1.,6*0
*2.,0.,4.,-8.,2.,-16.,21.0016,-8.,4.,-8.,2.,0.,1.,6*0.,2.,0.,2.,-
*8.,2.,-8.,19.0016,0.,2.,-8.,2*0.,1.,6*0.,1.,2*0.,-8.,2.,0.,20.0016
*,-8.,1.,-8.,2.,0.,1.,6*0.,1.,0.,4.,-8.,2.,-16.,21.0016,-8.,4.,-8.,
*2.,0.,1.,6*0.,1.,0.,2.,-8.,2.,-8.,19.0016,0.,2.,-8.,2*0.,1.,6*0.,1
*2*0.,-8.,2.,0.,20.0016,-8.,1.,-8.,2.,8*0.,1.,0.,4.,-8.,2.,-16.,2
*1.0016,-8.,4.,-8.,2.,8*0.,1.,0.,2.,-3.,2.,-8.,19.0016,0.,2.,-8.,9*
*0.,1.,2*0.,-8.,2.,0.,19.0016,-8.,1.,10*0.,1.,0.,4.,-8.,2.,-16.,20.
*0016,-8.,11*0.,1.,0.,2.,-8.,2.,-8.,18.0016/,B/2*0.,1.,2*0.,1.,2*0.
*,1.,2*0.,1.,2*0.,1.,1.,1.,2./
CALL LEQ12F(A,M,N,IA,B,IDGT,WKAREA,IER)
IFCIER.EQ.33)STOP
WRITE(6,4)-
4 FORMAT(//,25X,'** PLACA RETANGULAR APOIADA SOBRE BASE ELASTICA **'
,/)
WRITE(6,1)
1 FORMAT(//,40X,'** RESULTADOS: W/(K**2*MT/D) **',/)
DO 2 I=1,N
2 WRITE(6,3)I,B(I)
3 FORMAT(20'I5,I34,E18.8)
STOP
END

```

\*\* PLACA RETANGULAR APOIADA SOBRE BASE ELASTICA \*\*

\*\* RESULTADOS:  $W/(K \cdot 2 \cdot MT/D)$  \*\*

1	.40067638E+01
2	.35726884E+01
3	.22530977E+01
4	.39512851E+01
5	.35245413E+01
6	.22251739E+01
7	.37696827E+01
8	.33667715E+01
9	.21334496E+01
10	.34127342E+01
11	.30558169E+01
12	.19514652E+01
13	.27857184E+01
14	.25063299E+01
15	.16248326E+01
16	.17295132E+01
17	.15694542E+01
18	.10477211E+01

# Placa Retangular Sobre Base Elástica

```

FILE 6(KIND=PRINTER)
DIMENSION A(32,32),B(32),WKAREA(1120)
DATA M,N,IA,IGT/1,32,32,7/,A/20.00050625,-8.,1.,0.,-8.,2.,2*0.,1
*,23*0.,-16.,21.00050625,-8.,1.,4.,-8.,2.,2*0.,1.,22*0.,2.,-8.,20.
*00050625,-8.,0.,2.,-8.,2.,2*0.,1.,22*0.,1.,-8.,19.00050625,2*0.,2.
*, -8.,3*0.,1.,20*0.,-16.,4.,2*0.,21.00050625,-8.,1.,0.,-8.,2.,2*0.
*1.,19*0.,-8.,-16.,4.,0.,-16.,22.00050625,-8.,1.,4.,-8.,2.,2*0.,1.,1
*9*0.,4.,-16.,4.,2.,-8.,21.00050625,-8.,0.,2.,-8.,2.,2*0.,1.,19*0.
*4.,-16.,0.,1.,-8.,20.00050625,2*0.,2.,-8.,3*0.,1.,16*0.,2.,3*0.,-8
*,2.,2*0.,-20.00050625,-8.,1.,0.,-8.,2.,2*0.,1.,16*0.,2.,2*0.,4.,-8
*,2.,0.,-16.,21.00050625,-8.,1.,4.,-8.,2.,2*0.,1.,16*0.,2.,2*0.,2.
*, -8.,2.,2.,-8.,20.00050625,-8.,0.,2.,-8.,2.,2*0.,1.,16*0.,2.,2*0.
*2.,-8.,0.,1.,-8.,19.00050625,2*0.,2.,-8.,3*0.,1.,16*0.,1.,3*0.,-8.
*,2.,2*0.,-20.00050625,-8.,1.,0.,-8.,2.,2*0.,1.,16*0.,1.,2*0.,4.,-8.
*,2.,0.,-16.,21.00050625,-8.,1.,4.,-8.,2.,2*0.,1.,15*0.,1.,2*0.,2.
*, -8.,2.,2.,-8.,20.00050625,-8.,0.,2.,-8.,2.,2*0.,1.,16*0.,1.,2*0.,2
*, -8.,0.,1.,-8.,19.00050625,2*0.,2.,-8.,3*0.,1.,16*0.,1.,3*0.,-8.,
*2.,2*0.,-20.00050625,-8.,1.,0.,-8.,2.,2*0.,1.,16*0.,1.,2*0.,4.,-8.
*2.,0.,-16.,21.00050625,-8.,1.,4.,-8.,2.,2*0.,1.,16*0.,1.,2*0.,2.-
*8.,2.,2.,-8.,20.00050625,-8.,0.,2.,-8.,2.,2*0.,1.,15*0.,1.,2*0.,2.
*, -8.,0.,1.,-8.,19.00050625,2*0.,2.,-8.,3*0.,1.,16*0.,1.,3*0.,-8.,2
*,2*0.,-20.00050625,-8.,1.,0.,-8.,2.,2*0.,1.,16*0.,1.,2*0.,4.,-8.,2
*,0.,-16.,21.00050625,-8.,1.,4.,-8.,2.,2*0.,1.,16*0.,1.,2*0.,2.,-8
*,2.,2.,-8.,20.00050625,-8.,0.,2.,-8.,2.,2*0.,1.,16*0.,1.,2*0.,2.
*, -8.,0.,1.,-8.,19.00050625,2*0.,2.,-8.,3*0.,1.,16*0.,1.,3*0.,-8.,2.
*,2*0.,-20.00050625,-8.,1.,0.,-8.,2.,19*0.,1.,2*0.,4.,-8.,2.,0.,-16.
*,21.00050625,-8.,1.,4.,-8.,2.,19*0.,1.,2*0.,2.,-8.,2.,-8.,20.00
*050625,-8.,0.,2.,-8.,2.,19*0.,1.,2*0.,2.,-8.,0.,1.,-8.,19.00050625
*2*0.,2.,-8.,20*0.,1.,3*0.,-8.,2.,2*0.,19.00050625,-8.,1.,22*0.,1.
*2*0.,4.,-8.,2.,0.,-16.,20.00050625,-8.,1.,22*0.,1.,2*0.,2.,-8.,2.
*,2.,-8.,19.00050625,-8.,23*0.,1.,2*0.,2.,-8.,0.,1.,-8.,18.00050625
*/B/3*0.,1.,3*0.,1.,3*0.,1.,3*0.,1.,3*0.,1.,3*0.,1.,1.,1.,1.
*1.,2./-
CALL LEAT2F(A,M,N,IA,B,IGT,WKAREA,IER)
IF (IER.GE.33) STOP
WRITE(6,4)
4 FORMAT(//,25X,'** PLACA RETANGULAR APOIADA SOBRE BASE ELASTICA **'
*,//)
WRITE(6,1)
1 FORMAT(//,40X,'** RESULTADOS: W/(K**2*MT/D) **',//)
DO 2 I=1,N
2 WRITE(6,3)I,B(I)
3 FORMAT(I20,I5,I34,E13.8)
-- STOP
END

```

\*\* PLACA RETANGULAR APOIADA SOBRE BASE ELASTICA \*\*

\*\* RESULTADOS:  $W/(K \cdot 2 \cdot MT/D)$  \*\*

1	.71465956E+01
2	.671114405E+01
3	.53962401E+01
4	.31731192E+01
5	.70921571E+01
6	.66611053E+01
7	.53576387E+01
8	.31521854E+01
9	.69203545E+01
10	.65022102E+01
11	.52357021E+01
12	.30860101E+01
13	.66045164E+01
14	.62099126E+01
15	.50110212E+01
16	.29638509E+01
17	.60960865E+01
18	.57387725E+01
19	.46476459E+01
20	.27655044E+01
21	.53183276E+01
22	.50163199E+01
23	.40867825E+01
24	.24563227E+01
25	.41577193E+01
26	.39335820E+01
27	.32357719E+01
28	.19801836E+01
29	.24548215E+01
30	.23332760E+01
31	.19493321E+01
32	.12318811E+01

# Setor Circular

```

FILE 6(KIND=PRINTER)
DIMENSION A(9,9),B(9),WKAREA(108)
DATA M,N,IA,IDGT/1.9,9.,7/,A/17.05235236,-7.289868134,2.,-3.920324
*909,1.130892171,0.,0.2201992256,2*0.,-7.289868134,16.05235236,-14.
*57973627,1.130892171,-3.920324909,2.261784342,0.,0.2201992256,0.,1
*.,-7.289868134,16.05235226,0.,1.130892171,-3.920324909,2*0.,0.2201
*992256,-6.232022809,1.799146636,0.,14.10188906,-6.398862181,2.,-2.
*356128825,0.7710628438,0.,1.799146636,-6.232022809,3.598293272,-6.
*398862181,14.10188906,-12.79772436,0.7710628438,-2.356128825,1.542
*125688,0.,1.799146636,-6.232022809,1.,-6.398862181,13.10188906,0.,
*0.7710628438,-2.356128825,0.6042266751,2*0.,-4.079650512,1.3365089
*28,0.,11.25121655,-5.644934067,2.,0.,0.6042266751,0.,1.336508929,-
*4.079650512,2.673017858,-5.644934067,10.25121655,-11.28986813,2*0.
*0.6042266751,0.,-1.336508928,-4.079650512,-1.,-5.644934067,-10.25126
*55/,B/0.0497305905,0.0497305905,0.0497305905,3*0.,0.0094102233,0.0
*094102233,0.0094102233/
CALL LEQT2F(A,M,N,IA,B,IDGT,WKAREA,IER)
IF(IER.GE.33)STOP
WRITE(6,4)-
4 FORMAT(/,25X,'** SETOR CIRCULAR COM 2 ENGASTES E 2 APOIDS **',/)
WRITE(6,1)
1 FORMAT(/,40X,'** RESULTADOS: W/(MT*A**2/D)-**',/)
DO 2 I=1,N
2 WRITE(6,3)I,B(I)
3 FORMAT(I20,I5,I34,E18.8)
STOP
END

```

\*\* SETOR CIRCULAR COM 2 ENGASTES E 2 APOIOS \*\*

\*\* RESULTADOS: W/(MT\*A\*\*2/D) \*\*

1	.20152221E-01
2	.42248396E-01
3	.48461853E-01
4	.20720032E-01
5	.46673310E-01
6	.55987698E-01
7	.17819102E-01
8	.40701090E-01
9	.47072122E-01



# Setor Circular

FILE 6(KINC=PRINTER)

DIMENSION A(15,15),B(15),WKAREA(270)

```
DATA M,N,IA,IDGT/1,15,15,77,A/44.70003394,-12.22467033,2.,-18.870
*24588,3.255598674,0.,2.140336473,8*0.,-12.22467033,44.70003394,-24
*.44934066,3.255598674,-18.87024588,6.511197348,0.,2.140336473,7*0.
*1.,-12.22467033,43.70003394,0.,3.255598674,-18.87024588,2*0.,2.14
*0336473,6*0.,-25.12008306,4.335086655,0.,38.24536389,-10.78535303,
*2.,-13.39896626,2.621613669,0.,1.352904042,5*0.,4.335086655,-25.12
*008306,8.67017331,-10.78535303,38.24536389,-21.57070606,2.62161366
*9.,-13.39896626,5.243227338,0.,1.352904042,5*0.,4.335086655,-25.120
*08306,1.,-10.78535303,37.24536389,0.,2.621613669,-13.39896626,2*0.
*,1.352904042,3*0.,3.907802257,2*0.,-18.3841752,3.598293271,0.,29.5
*716071,-9.483113559,2.,-9.240921931,2.056167584,0.,0.8056355668,3*
*0.,-3.907802257,0.,3.598293271,-18.3841752,7.196586542,-9.483113559
*,29.5716071,-18.96622712,2.056167584,-9.24021931,4.112335168,0.,0.
*8056355668,3*0.,3.907802257,0.,3.598293271,-18.3841752,1.,-9.48311
*3559,28.5716071,0.,2.056167584,-9.240921931,2*0.,0.8056355668,3*0.
*,2.642390707,2*0.,-13.16232433,2.930038807,0.,22.88897274,-8.31795
*1925,2.,-6.153012963,1.559260413,5*0.,2.642390707,0.,2.930038807,-
*13.16232433,5.860077614,-8.317951925,22.88897274,-16.63590385,1.55
*9260418,-6.153012963,3.118520836,5*0.,2.642390707,0.,2.930038807,-
*13.16232433,1.,-8.317951925,-21.88897274,0.,1.559260418,-6.15301296
*3,6*0.,1.712269178,2*0.,-9.190291393,2.330323261,0.,17.21338675,-7
*.289868134,2.,7*0.,1.712269178,0.,2.330323261,-9.190291393,4.660646
*522,-7.289868134,17.21338675,-14.57973627,8*0.,1.712269178,0.,2.33
*0323261,-9.190291393,1.,-7.289868134,16.21338675,-8*0.,1291835459,0
*,1291835459,0.1291835459,9*0.,0.0170685502,0.0170685502,0.01706855
*02/
```

CALL LEQT2F(A,M,N,IA,B,IDGT,WKAREA,IER)

IF(IER.GE.33)STOP

WRITE(6,4)-

4 FORMAT(//,25X,'\*\* SETOR CIRCULAR COM 2 ENGASTES OPOSTOS E 2 APOIOS

-\* \*\*',//)

WRITE(6,1)

1 FORMAT(//,40X,'\*\* RESULTADOS: W/(MT\*A\*\*2/D) \*\*',//)

DO 2 I=1,N

2 WRITE(6,3)I,B(I)

3 FORMAT(T20,I5,T34,E18.8)

STOP

END

\*\* SETOR CIRCULAR COM 2 ENGASTES OPOSTOS E 2 APOIOS \*\*

\*\* RESULTADOS: W/(MT\*A\*\*2/D) \*\*

1	.12120941E-01
2	.21382962E-01
3	.24589381E-01
4	.13343229E-01
5	.26579745E-01
6	.31557653E-01
7	.11296598E-01
8	.24354402E-01
9	.29547060E-01
10	.90648190E-02
11	.19859158E-01
12	.24216665E-01
13	.67960550E-02
14	.13820539E-01
15	.16544745E-01

# Setor Circular

FILE 6(KIND=PRINTER)

DIMENSION A(20,20),B(20),WKAREA(460)

```
DATA M,N,IA,IDGT/1,20,20, 7/,A/22.97660629,-8.626377063,1.,0.,-7.5
*73028709,1.831274254,2*0.,0.6772153371,1.1*0.,-8.626377063,21.97660
*629,-8.626377063,2.,1.831274254,-7.573028709,1.831274254,2*0.,0.67
*72158371,1.0*0.,1.,-8.626377063,22.97660629,-17.25275413,0.,1.83127
*4254,-7.573028709,3.662548508,2*0.,0.6772158371,1.0*0.,1.,-8.626377
*063,21.97660629,2*0.,1.831274254,-7.573028709,3*0.,0.6772158371,8*
*0.,-10.08182674,2.438486244,2*0.,20.25589436,-7.816761077,1.,0.,-5
*529842145,1.474657689,2*0.,0.4280672946,7*0.,2.438486244,-10.0818
*2674,2.438486244,0.,-7.816761077,19.22589436,-7.816761077,2.,1.474
*657689,-5.529842145,1.474657689,2*0.,0.4280672946,7*0.,2.438486244
*,-10.08182674,4.876972488,1.,-7.816761077,20.22589436,-15.63352215
*,-0.,1.474657689,-5.529842145,2.949315378,2*0.,0.4280672946,7*0.,2.
*438486244,-10.08182674,0.,1.,-7.816761077,19.22589436,2*0.,1.47465
*7689,-5.529842145,3*0.,0.4280672946,4*0.,1.236453058,3*0.,-7.58790
*2903,2.024039965,2*0.,16.84051751,-7.084251375,1.,0.,-3.935905437,
*1.156594266,2*0.,0.2549081285,4*0.,1.236453058,2*0.,2.024039965,-7
*587902903,2.024039965,0.,-7.084251375,15.84051751,-7.084251375,2.
*,1.156594266,-3.935905437,1.156594266,2*0.,0.2549081285,4*0.,1.236
*453058,2*0.,2.024039965,-7.587902903,4.04807993,1.,-7.084251375,16
*84051751,-14.16850275,0.,1.156594266,-3.935905437,2.313188532,2*0
*,-0.2549081285,4*0.,1.236453058,2*0.,2.024039965,-7.587902903,0.,1
*,-7.084251375,15.84051751,2*0.,1.156594266,-3.935905437,3*0.,0.2
*49081285,4*0.,0.8360689347,3*0.,-5.606770159,1.648146829,2*0.,14.1
*5261225,-6.428847958,1.,0.,-2.714300245,0.8770839849,7*0.,0.836068
*9347,2*0.,1.648146829,-5.606770159,1.648146829,0.,-6.428847958,13.
*15261225,-6.428847958,2.,0.8770839849,-2.714300245,0.8770839849,7*
*0.,0.8360689347,2*0.,1.648146829,-5.606770159,3.296293658,1.,-6.42
*8847958,-14.15261225,-12.85769592,0.,0.8770839849,-2.714300245,1.75
*416797,7*0.,0.8360689347,2*0.,1.648146829,-5.606770159,0.,1.,-6.42
*8847958,13.15261225,2*0.,0.8770839849,-2.714300245,8*0.,0.54177266
*97,3*0.,-4.054821616,1.310806835,2*0.,11.85081138,-5.850550825,1.,
*10*0.,0.5417726697,2*0.,1.310806835,-4.054821616,1.310806835,0.,-5
*.850550825,10.85081138,-5.850550825,2.,10*0.,0.5417726697,2*0.,1.3
*10806835,-4.054821616,2.62161367,1.,-5.850550825,11.85081138,-11.7
*0110165,1.1*0.,0.5417726697,2*0.,1.310806835,-4.054821616,0.,1.,-5.
*850550825,10.85081138,8*0.,0.0408744813,0.0408744813,0.0408744813,0.
*0408744813,12*0.,0.0054005959,0.0054005959,0.0054005959,0.00540059
*59/
```

CALL LEQT2F(A,M,N,IA,B,IDGT,WKAREA,IER)

IF(IER.GE.33)STOP

WRITE(6,4)

4 FORMAT(/,25X,'\*\* SETOR CIRCULAR COM 2 ENGASTES OPSTOS E 2 APOIDS

\* \*\*',//)

WRITE(6,1)

1 FORMAT(/,40X,'\*\* RESULTADOS: W/(MT\*A\*\*2/D) \*\*',//)

DO 2 I=1,N

2 WRITE(6,3)I,B(I)

3 FORMAT(T20,I5,F34,E18.8)

STOP

\*\* SETOR CIRCULAR COM 2 ENGASTES OPOSTOS E 2 APOIOS \*\*

\*\* RESULTADOS: W/(MT\*A\*\*2/D) \*\*

1	.82988487E-02
2	.16665058E-01
3	.22063180E-01
4	.23896602E-01
5	.82881245E-02
6	.19385036E-01
7	.27435964E-01
8	.30297177E-01
9	.66159328E-02
10	.16963557E-01
11	.25066901E-01
12	.28044100E-01
13	.52676587E-02
14	.13693952E-01
15	.20407940E-01
16	.22899588E-01
17	.42120782E-02
18	.99391840E-02
19	.14234559E-01
20	.15801066E-01

SUBROUTINA LEQT2F

IMSL ROUTINE NAME - LEQT2F

PURPOSE - LINEAR EQUATION SOLUTION - FULL STORAGE  
MODE - HIGH ACCURACY SOLUTION

USAGE - CALL LEQT2F (A,M,N,IA,B,IDGT,WKAREA,IER)

ARGUMENTS

A	- INPUT MATRIX OF DIMENSION N BY N CONTAINING THE COEFFICIENT MATRIX OF THE EQUATION $AX = B$ .
M	- NUMBER OF RIGHT-HAND SIDES. (INPUT)
N	- ORDER OF A AND NUMBER OF ROWS IN B. (INPUT)
IA	- ROW DIMENSION OF A AND B EXACTLY AS SPECIFIED IN THE DIMENSION STATEMENT IN THE CALLING PROGRAM. (INPUT)
B	- INPUT MATRIX OF DIMENSION N BY M CONTAINING THE RIGHT-HAND SIDES OF THE EQUATION $AX = B$ . ON OUTPUT, THE N BY M MATRIX OF SOLUTIONS REPLACES B.
IDGT	- INPUT OPTION. IF IDGT IS GREATER THAN 0, THE ELEMENTS OF A AND B ARE ASSUMED TO BE CORRECT TO IDGT DECIMAL DIGITS AND THE ROUTINE PERFORMS AN ACCURACY TEST. IF IDGT EQUALS 0, THE ACCURACY TEST IS BYPASSED. ON OUTPUT, IDGT CONTAINS THE APPROXIMATE NUMBER OF DIGITS IN THE ANSWER WHICH WERE UNCHANGED AFTER IMPROVEMENT.
WKAREA	- WORK AREA OF DIMENSION GREATER THAN OR EQUAL TO $N^{**2}+3N$ .
IER	- ERROR PARAMETER. (OUTPUT) WARNING ERROR IER = 34 INDICATES THAT THE ACCURACY TEST FAILED. THE COMPUTED SOLUTION MAY BE IN ERROR BY MORE THAN CAN BE ACCOUNTED FOR BY THE UNCERTAINTY OF THE DATA. THIS WARNING CAN BE PRODUCED ONLY IF IDGT IS GREATER THAN 0 ON INPUT. (SEE THE CHAPTER 1 PRELUDE FOR FURTHER DISCUSSION.) TERMINAL ERROR IER = 129 INDICATES THAT THE MATRIX IS ALGORITHMICALLY SINGULAR. (SEE THE CHAPTER 1 PRELUDE). IER = 131 INDICATES THAT THE MATRIX IS TOO ILL-CONDITIONED FOR ITERATIVE IMPROVEMENT TO BE EFFECTIVE.

PRECISION/HARDWARE - SINGLE AND DOUBLE/H32  
- SINGLE/H36,H48,H60

REQD. IMSL ROUTINES - SINGLE/LUDATF,LUELME,LUREFF,UERTST,UGETIO  
- DOUBLE/LUDATF,LUELME,LUREFF,UERTST,UGETIO,  
VXADD,VXMUL,VXSTO

NOTATION - INFORMATION ON SPECIAL NOTATION AND  
CONVENTIONS IS AVAILABLE IN THE MANUAL  
- INTRODUCTION OR THROUGH IMSL ROUTINE UHELP

LEQT2F-1

Algorithm

LEQT2F solves the set of linear equations  $AX=B$  for  $X$ , where  $A$  is the  $N$  by  $N$  matrix and is in full storage mode.  $B$  is  $N$  by  $M$ . The difference between this routine and routine LEQT1F is that LEQT2F invokes iterative improvement if necessary, in order to improve the accuracy of the solution  $X$ .

The routine performs Gaussian elimination (Crout algorithm) with equilibration, partial pivoting, and iterative improvement as required.

See reference:

Forsythe, George and Moler, Cleve B., Computer Solution of Linear Algebraic Systems, Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, Inc., 1967, Chapters 9, 13, 24.

Programming Notes

1. Iterative improvement is costly in both computer time and storage. When high accuracy is not needed, subroutine LEQT1F may be used to advantage.
2. When  $IA$  is greater than  $N$ , elements of  $A$  in rows  $N+1$  to  $IA$  are used as workspace and are destroyed. However, the first  $N$  rows of  $A$  are restored to their original content on exit from LEQT2F.

Accuracy

If  $IDGT$  is greater than zero, elements of  $A$  are assumed to be correct to  $IDGT$  decimal digits. The solution  $X$  will be the exact solution, without any roundoff error, to a matrix  $\tilde{A}$  whose elements agree with the elements of  $A$  in the first  $IDGT$  decimal digits. The program first attempts such a solution without iterative improvement. Then iterative improvement is performed if necessary. If this also fails, solution is not possible and the program exits. Upon exit, the first columns of  $B$  will have been replaced by the best solution that the computer can generate and  $IDGT$  is set to the approximate number of digits in the answer which were unchanged by the improvement (see IMSL routine LUREFF). The other columns of  $B$  are left unchanged in this case and  $IER$  is set to 131. If input  $IDGT$  equals zero, iterative improvement is automatically performed.

Example

This example inputs the 3 by 3 matrix  $A$  and the 3 by 4 matrix  $B$  solving for the 3 by 4 matrix  $X$  of  $AX=B$ .  $X$  overwrites  $B$  on output.

Input:

```
REAL A(4,4),B(4,4),WKAREA(18)
INTEGER M,N,IA,IDGT,IER
N      = 3
M      = 4
IA     = 4
IDGT   = 3
```

LEQT2F-2

$$A = \begin{bmatrix} 33.000 & 16.0 & 72.0 & x \\ -24.000 & -10.0 & -57.0 & x \\ -8.000 & -4.0 & -17.0 & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & -359.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 281.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 85.0 \\ x & x & x & x \end{bmatrix}$$

CALL LEQT2F(A,M,N,IA,B,IDGT,WKAREA,IER)

Output:

IDGT = 3

IER = 0

$$B = \begin{bmatrix} -9.66666 & -2.66667 & -32. & 1. \\ 8.0 & 2.5 & 25.5 & -2. \\ 2.66667 & .666667 & 9. & -5. \\ x & x & x & x \end{bmatrix}$$

Note: x indicates elements not used by LEQT2F.